TỰ HỌC TOÁN 9

HỌC KỲ II

Th.s NGUYỄN CHÍN EM

MỤC LỤC

PHẦN

I

ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 3 HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

BÀI 1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình dạng $ax + by = c$. Trong đó:

— a, b, c là hằng số và a, b không đồng thời bằng không.

— x, y là hai ẩn số.

Từ đó ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1. Nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn là các cặp giá trị $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2), \ldots$ của hai ẩn số x và y thỏa mãn tính chất "khi thay vào phương trình thì giá trị tương ứng của hai biểu thức ở hai vế của phương trình bằng nhau ".

2. Cách giải

Mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đều có vô số nghiệm. Tập hợp các nghiệm của phương trình được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng, gọi là đường thẳng $ax + by = c$ (mỗi điểm của đường thẳng $ax + by = c$ biểu diễn một cặp nghiệm $(x; y)$ của phương trình).

— Nếu $a \neq 0$, $b \neq 0$ thì đường thẳng đó là đồ thị của hàm số bậc nhất $y = -\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b}$.

— Nếu $a = 0$, $b \neq 0$ thì đường thẳng đó là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{c}{b}$. Đó là đường thẳng song song với Ox nếu $c \neq 0$, trùng với Ox nếu $c = 0$.

— Nếu $a \neq 0$, $b = 0$ thì đường thẳng đó có dạng $x = \dfrac{c}{a}$. Đó là đường thẳng song song với Oy nếu $c \neq 0$, trùng với Oy nếu $c = 0$.

⚠ ***Chú ý:***

1. Đường thẳng $x = \dfrac{c}{a}$ không phải là đồ thị của hàm số.

2. Với yêu cầu giải phương trình $ax + by = c$, ta thường thực hiện ba công việc:

— *Biến đổi để chỉ ra một vài nghiệm cụ thể của phương trình.*

— *Viết được công thức nghiệm tổng quát của phương trình.*

— *Biểu diễn nghiệm của phương trình trên mặt phẳng tọa độ.*

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Trong các cặp số $(-2;1), (0;2), (-1;0), (1;5)$ và $(4;-3)$ cặp số nào là nghiệm của phương trình

a) $5x + 4y = 8$. b) $3x + 5y = -3$.

LỜI GIẢI.

Để giải dạng toán này, ta thay các cặp số đã cho vào vế trái của biểu thức. Số thứ nhất thay vào biến x, số thứ hai thay vào biến y và tính toán.

— Nếu kết quả có được bằng vế phải thì cặp số đã cho là nghiệm của phương trình.

— Nếu kết quả có được không bằng vế phải thì cặp số đã cho không là nghiệm của phương trình.

a. Xét phương trình $5x + 4y = 8$.

— Với cặp số $(-2;1)$. Ta có $5(-2) + 4 \cdot 1 = -6 \neq 8$.
Do đó cặp số $(-2;1)$ không là nghiệm của phương trình.

— Với cặp $(0;2)$. Ta có $5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$.
Do đó, cặp số $(0;2)$ là nghiệm của phương trình.

— Với cặp số $(-1;0)$. Ta có $5 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = -5 \neq 8$.
Do đó, cặp số $(-1;0)$ không là nghiệm của phương trình.

— Với cặp số $(1{,}5;3)$. Ta có $5 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot 3 = 19{,}5 \neq 8$.
Do đó, cặp số $(1{,}5;3)$ không phải là nghiệm của phương trình.

— Với cặp số $(4;-3)$. Ta có $5 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 8$.
Do đó, cặp số $(4;-3)$ là nghiệm của phương trình.

b. Xét phương trình $3x + 5y = -3$.

— Các cặp $(-1;0)$ và $(4;-3)$ là nghiệm của phương trình.

— Các cặp $(-2;1)$, $(0;2)$ và $(1{,}5;3)$ không là nghiệm của phương trình.

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $x - 2y = 6$.

LỜI GIẢI.

Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng $x = 2y + 6$.

Tới đây, cho y các giá trị tùy ý chúng ta sẽ tính được giá trị tương ứng của x, cụ thể:

— Với $y = -4 \Rightarrow x = 2 \cdot (-4) + 6 = -2 \Rightarrow$ cặp $(-2;-4)$ là một nghiệm.

— Với $y = 0 \Rightarrow x = 2 \cdot 0 + 6 = 6 \Rightarrow$ cặp $(6;0)$ là một nghiệm.

Vì y có thể lấy giá trị tùy ý, nên phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $(x = 2y + 6; y \in \mathbb{R})$ hoặc viết $(2y + 6; y)$. □

Nhận xét.

1. *Vì vai trò của x, y trong phương trình như nhau nên có thể giải phương trình theo cách:*
Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng $y = \dfrac{x-6}{2}$.
Tới đây, cho x các giá trị tùy ý chúng ta sẽ tính được giá trị tương ứng của y, cụ thể:
— *Với $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ cặp số $(0;-3)$ là một nghiệm của phương trình.*

— *Với $x = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow$ cặp số $(2; -2)$ là một nghiệm của phương trình.*

Vì x có thể lấy giá trị tùy ý nên phương trình đã cho có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $\left(x; \dfrac{x-6}{2}\right)$.

2. *Tập nghiệm của phương trình $x - 2y = 6 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x - 3$ là một đường thẳng.*

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $0x + 2y = 12$.

LỜI GIẢI.

Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng $2x = 12 \Leftrightarrow y = 6$.

Tới đây, cho x các giá trị tùy ý ta luôn nhận được $y = 6$. Do đó các cặp số $(-81; 6), (33; 6), \ldots$ đều là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $(x \in \mathbb{R}; y = 6)$ hoặc viết $(x; 6)$. □

Nhận xét.

1. *Vì hệ số của x trong phương trình bằng 0 nên không thể giải phương trình theo x được.*
2. *Tập các nghiệm của phương trình: $0x + 2y = 12 \Leftrightarrow y = 6$ là một đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 6.*

Tổng quát: Phương trình $y = m$ có vô số nghiệm dạng $(x; m)$, biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng m nếu $m \neq 0$, trùng với Ox nếu $m = 0$.

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $6x - 0y = 18$.

LỜI GIẢI.

Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng $6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$.

Tới đây, cho y các giá trị tùy ý ta luôn nhận được $x = 3$. Do đó, các cặp số $(3; 2005), (3; 1989), \ldots$ đều là nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $(3; y \in \mathbb{R})$ hoặc viết $(3; y)$. □

Nhận xét.

1. *Vì hệ số của y trong phương trình bằng 0 nên không thể giải phương trình theo y được.*
2. *Tập nghiệm của phương trình $6x - 0y = 18 \Leftrightarrow x = 3$ là một đường thẳng song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 3.*

Tổng quát: Phương trình $x = n$ có vô số nghiệm dạng $(n; y)$, biểu diễn trễn mặt phẳng tọa độ là đường thẳng song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng n nếu $n \neq 0$, trùng với Oy nếu $n = 0$.

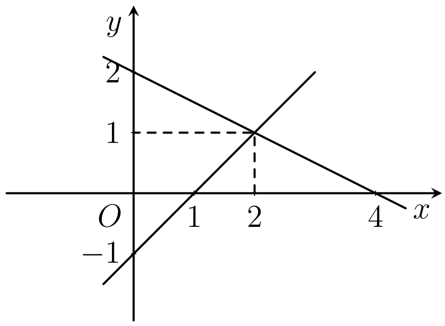
VÍ DỤ 5. Cho hai phương trình $x + 2y = 4$ và $x - y = 1$. Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một hệ tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng và cho biết tọa độ của nó là nghiệm của các phương trình nào?

LỜI GIẢI.

Ta có

— Đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $x + 2y = 4$ đi qua hai điểm $A(0; 2)$ và $B(4; 0)$.

— Đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $x - y = 1$ đi qua hai điểm $C(0; -1)$ và $D(1; 0)$.



Từ đồ thị hàm số, dễ dàng nhận thấy hai đường thẳng AB và CD giao nhau tại điểm $M(2; 1)$.
Vì $M \in AB$ và $M \in CD$ nên tọa độ M là nghiệm của cả hai phương trình $x + 2y = 4$ và $x - y = 1$. □

VÍ DỤ 6. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $x - 3y = 4$. b) $3x + y = 6$. c) $4x - 5y = 8$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Biến đổi phương trình về dạng $x = 3y + 4$.
Nhận xét rằng, với mọi $y \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $x = 3y + 4 \in \mathbb{Z}$.
Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(3y + 4; y)$ với $y \in \mathbb{Z}$.

❷ Biến đổi phương trình về dạng $y = -3x + 6$.
Nhận xét rằng, với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $y = -3x + 6 \in \mathbb{Z}$.
Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(x; -3x + 6)$ với $x \in \mathbb{Z}$.

❸ Biến đổi phương trình về dạng $4x = 5y + 8 \Leftrightarrow x = y + 2 + \dfrac{y}{4} \quad (1)$.
Đặt $k = \dfrac{y}{4}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = 4k, k \in \mathbb{Z}$.
Thay $y = 4k$ vào (1) ta được $x = 4k + 2 + k = 5k + 2 \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.
Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(5k + 2; 4k)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

□

Nhận xét. *Như vậy, qua ví dụ trên chúng ta đã biết được một phương pháp tìm nghiệm nguyên của một phương trình bậc nhất hai ẩn.*

VÍ DỤ 7. Cho đường thẳng $(d)\colon mx - (m + 4)y = m$.

1. Tìm m để đường thẳng (d):
   a. Cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt.
   b. Song song với Ox.
   c. Song song với Oy.
   d. Song song với đường thẳng $(\Delta)\colon x + y = 6$.
2. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Với đường thẳng (d), ta có $a = m, b = -(m + 4)$ và $c = m$.

a. Để (d) cắt cả hai trục tọa độ, điều kiện là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -(m+4) \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -4. \end{cases}$$

Vậy với $m \neq 0$ và $m \neq 4$, thỏa mãn yêu cầu đề bài.

b. Để (d) song song với Ox, điều kiện là

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -(m+4) \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \text{(vô nghiệm).}$$

Vậy không tồn tại m để (d) song song với Ox.

c. Để (d) song song với Oy, điều kiện là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -(m+4) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy với $m = -4$, thỏa mãn yêu cầu đề bài.

d. Viết lại hai phương trình đường thẳng (d) và (Δ) dưới dạng:
$(d)\colon y = \dfrac{m}{m+4}x - \dfrac{m}{m+4}$, với $m \neq -4$ và $(\Delta)\colon y = -x + 6$.
Khi đó, để (d) song song với (Δ), điều kiện là

$$\frac{m}{m+4} = -1 \Leftrightarrow m = -m - 4 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy với $m = -2$, thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua. Khi đó ta có
$$mx_0 - (m+4)y_0 = m, \forall m \Leftrightarrow (x_0 - y_0 - 1)m - 4y_0 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ -4y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0. \end{cases}$$
Vậy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định là $M(1; 0)$.

□

VÍ DỤ 8.

❶ Lập công thức tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng $ax + by + c = 0$.

❷ Áp dụng, tính khoảng cách từ gốc tọa đến đường thẳng $3x - 4y = 10$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$.
Khi đó, đường thẳng có dạng $by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{c}{b}$. Do đó, khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng bằng $\left|-\dfrac{c}{b}\right| = \left|\dfrac{c}{b}\right|$.

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$.
Khi đó, đường thẳng có dạng $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{c}{a}$. Do đó, khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng bằng $\left|-\dfrac{c}{a}\right| = \left|\dfrac{c}{a}\right|$.

Trường hợp 3: Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$.
Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Ox, Oy, ta được:

— Với điểm $A: x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{c}{b}$, do đó $A\left(0; -\dfrac{c}{a}\right)$.

— Với điểm $B: y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{c}{a}$, do đó $B\left(-\dfrac{c}{a}; 0\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).
Trong $\triangle OAB$ vuông tại O, ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OA \cdot OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{\left|\frac{c}{b}\right| \cdot \left|-\frac{c}{a}\right|}{\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(-\frac{c}{a}\right)^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (*).$$

❷ Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng, ta có ngay $h = \dfrac{|-10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$.

□

Nhận xét. *Công thức $(*)$ vẫn đúng trong trường hợp 1 và trường hợp 2.*

VÍ DỤ 9. Cho hai đường thẳng

$$(d_1)\colon a_1x + b_1y + c_1 = 0\,(a_1, b_1 \neq 0)$$

$$(d_2)\colon a_2x + b_2y + c_2 = 0\,(a_2, b_2 \neq 0).$$

Chứng minh rằng

❶ (d_1) và (d_2) cắt nhau khi $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

❷ (d_1) và (d_2) song song với nhau khi $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

❸ (d_1) và (d_2) trùng nhau khi $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

✍ LỜI GIẢI.

Như ta đã học ở phần trước, với hai đường thẳng $(d_1)\colon y = m_1x + n_1$ và $(d_2)\colon y = m_2x + n_2$.
Ta có các kết quả::

— $(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$ và $n_1 \neq n_2$.

— $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$ và $n_1 = n_2$.

— $(d_1) \cap (d_2) = \{A\} \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$.

Viết lại các đường thẳng dưới dạng: $(d_1)\colon y = -\dfrac{a_1}{b_1}x + \dfrac{c_1}{b_1}$ và $(d_2)\colon y = -\dfrac{a_2}{b_2}x + \dfrac{c_2}{b_2}$.

❶ (d_1) và (d_2) cắt nhau khi $-\dfrac{a_1}{b_1} \neq -\dfrac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

❷ (d_1) và (d_2) song song với nhau khi $\begin{cases} -\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2} \\ \dfrac{c_1}{b_1} \neq \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \\ \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

❸ (d_1) và (d_2) trùng nhau khi $\begin{cases} -\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2} \\ \dfrac{c_1}{b_2} = \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \\ \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

□

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Giải các phương trình sau:

a) $4x - y = 1$

b) $x + 2y = 0$

c) $0x + 2y = 6$

d) $3x - 0y = 12$

✍ **LỜI GIẢI.**

a) Biến đổi phương trình về dạng $y = 4x - 1$.
Suy ra các cặp số $(1; 3)$, $(0; -1)$, ... là nghiệm của phương trình.
Vậy phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(x; 4x - 1)$.

b) Biến đổi phương trình về dạng $x = -2y$.
Suy ra các cặp số $(0; 0)$, $(-4; 2)$, ... là nghiệm của phương trình.
Vậy phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(-2y; y)$.

c) Biến đổi phương trình về dạng $2y = 6 \Leftrightarrow y = -3$.
Suy ra các cặp số $(0; 3)$, $(81; 3)$ ... là nghiệm của phương trình.
Vậy phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(x; 3)$.

d) Biến đổi phương trình về dạng $3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$.
Suy ra các cặp số $(4; 33)$, $(4; 89)$ ... là nghiệm của phương trình.
Vậy phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(4; y)$.

□

BÀI 2. Vẽ các đường thẳng có phương trình sau:

a) $3x - 4y = 12$

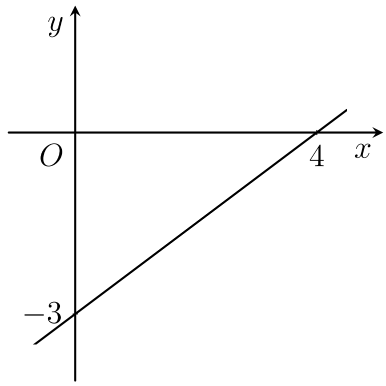
b) $3x - 2y = 0$

c) $0x - y = 2$

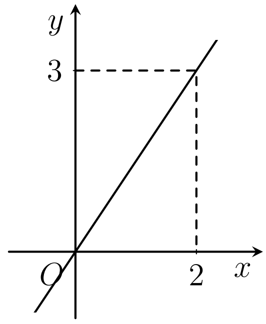
d) $2x - 0y = -4$

✍ **LỜI GIẢI.**

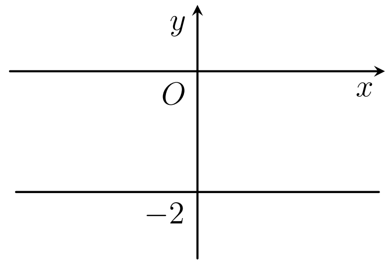
a) Với $x = 0 \Rightarrow y = -3$.
Với $y = 0 \Rightarrow x = 4$.
Đồ thị của hàm số $3x - 4y = 12$ là một đường thẳng đi qua 2 điểm $(0; -3)$ và $(4; 0)$.



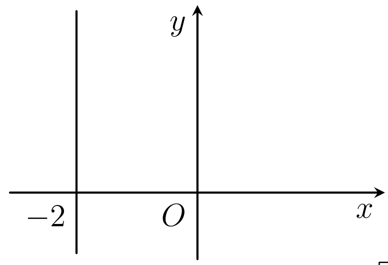
b) Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$.
Với $x = 2 \Rightarrow y = 3$.
Đồ thị của hàm số $3x - 2y = 0$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ và qua điểm $(2; 3)$.



c) Đồ thị hàm số $y = -2$ là một đường thẳng đi qua $(0; -2)$ và song song với trục Ox.



d) Đồ thị hàm số $x = -2$ là một đường thẳng đi qua $(-2; 0)$ và song song với trục Oy.



□

BÀI 3. Kiểm tra xem các cặp số $(3; -1), \left(\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\right), (81; -80), (2; 1)$. Cặp số nào là nghiệm của phương trình $x + y = 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta lần lượt xét:

— Thay $(3; -1)$ vào phương trình, ta được $3 + (-1) = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ (vô lý).
Vậy cặp $(3; -1)$ không là nghiệm của phương trình.

— Thay $\left(\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\right)$ vào phương trình, ta được $\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$ (đúng).
Vậy cặp $\left(\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\right)$ là nghiệm của phương trình.

— Thay $(81; -80)$ vào phương trình, ta được $81 - 80 = 1$ (đúng).
Vậy cặp $(81; -80)$ là nghiệm của phương trình.

— Thay (2;1) vào phương trình, ta được $2 + 1 = 1 \Leftrightarrow 3 = 1$ (vô lý).
Vậy cặp $(2; 1)$ không là nghiệm của phương trình.

□

BÀI 4. Đường thẳng $2x - y = -4$ đi qua điểm nào trong các điểm sau:

$$A(2; 4), B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 4 + \sqrt{2}\right), C(1; -2), D\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 2}; -2\sqrt{3}\right).$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta lần lượt xét:

— Thay $A(2; 4)$ vào phương trình, ta được $2 \cdot 2 - 4 = -4 \Leftrightarrow 0 = -4$ (vô lý).
Vậy đường thẳng không đi qua điểm A.

— Thay $B\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 4+\sqrt{2}\right)$ vào phương trình, ta được
$2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \left(4+\sqrt{2}\right) = -4 \Leftrightarrow -4 = -4$ (đúng).
Vậy đường thẳng đi qua điểm B.

— Thay $C(1;-2)$ vào phương trình, ta được $2\cdot 1 - (-2) = -4 \Leftrightarrow 4 = -4$ (vô lý).
Vậy đường thẳng không đi qua điểm C.

— Thay $D\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}; -2\sqrt{3}\right)$ vào phương trình, ta được
$2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}-2} - \left(-2\sqrt{3}\right) = -4 \Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+2}{-1} + 2\sqrt{3} = -4 \Leftrightarrow -4 = -4$ (đúng)
Vậy đường thẳng đi qua điểm D.

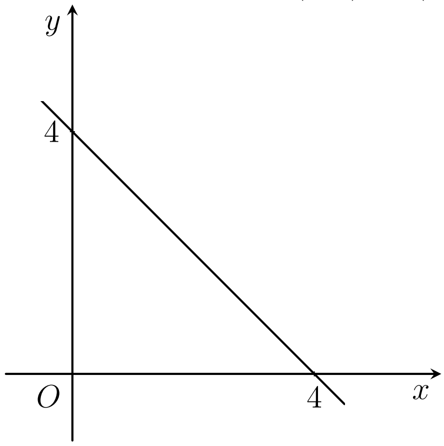
□

BÀI 5. Cho đường thẳng $(d)\colon mx + 2y = 4$.

1. Vẽ đường thẳng khi $m = 2$.
2. Tìm m để đường thẳng (d)
   a. Cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt.
   b. Song song với Ox.
   c. Song song với Oy.
   d. Song song với đường thẳng $\Delta\colon x + y = 6$.
   e. Có hướng đi lên.
   f. Có hướng đi xuống.
3. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Với $m = 2$ ta có $2x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = -x + 4$.
   Với $x = 0 \Rightarrow y = 4$; với $y = 0 \Rightarrow x = 4$.
   Đồ thị hàm số $y = -x + 4$ là một đường thẳng đi qua $(0;4)$ và $(4;0)$.



2. Xét phương trình $y = -\dfrac{m}{2}x + 2$. Ta có
   a. (d) cắt hai trục tọa độ tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -\dfrac{m}{2} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.
   b. (d) song song với $Ox \Leftrightarrow -\dfrac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
   c. (d) song song với $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\dfrac{2}{m} = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy không tồn tại m để (d) song song với Oy.

d. (d) song song với đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow -\dfrac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$.

e. (d) có hướng đi lên $\Leftrightarrow -\dfrac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

f. (d) có hướng đi xuống $\Leftrightarrow -\dfrac{m}{2} < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

3. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua. Khi đó ta có

$mx_0 + 2y_0 = 4\,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2y_0 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{cases}.$

Vậy $M(0; 2)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua khi m thay đổi.

□

BÀI 6. Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường thẳng sau luôn đi qua một điểm cố định.

a) $3x + m(y - 1) = 2$ b) $mx + (m - 2)y = m$

c) $m(x - 5) - 2y = 6$ d) $mx - 2y = 6$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua. Khi đó ta có

$3x_0 + m(y_0 - 1) - 2 = 0\,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 - 2 = 0 \\ y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{2}{3} \\ y_0 = 2 \end{cases}.$

Vậy $M\left(\dfrac{2}{3}; 2\right)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua khi m thay đổi.

❷ Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua. Khi đó ta có

$mx_0 + (m - 2)y_0 = m\,\forall m \Leftrightarrow (x_0 + y_0 - 1)m - 2y_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ -2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0. \end{cases}$

Vậy $M(1; 0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua khi m thay đổi.

❸ Giả sử $M(x_0; u_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua. Khi đó ta có

$m(x_0 - 5) - 2y_0 = 6\,\forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 5 = 0 \\ -2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -3 \end{cases}.$

Vậy $M(5; -3)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua khi m thay đổi.

❹ Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua. Khi đó ta có

$mx_0 - 2y_0 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ -2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3. \end{cases}$

Vậy $M(0; -3)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua khi m thay đổi.

□

BÀI 7. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $2x + y = 4$ b) $x - 7y = 9$ c) $x - 2y = 3$

d) $3x - 2y = 4$ e) $3x + y = 8$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Biến đổi phương trình về dạng $y = -2x + 4$.

Nhận xét rằng, với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $y = -2x + 4 \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(x; -2x + 4)$ với $x \in \mathbb{Z}$.

❷ Biến đổi phương trình về dạng $x = 7y + 9$.
Nhận xét rằng với mọi $y \in \mathbb{Z}$ ta luôn có $x = 7y + 9 \in \mathbb{Z}$.
Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(7y + 9; y)$ với $y \in \mathbb{Z}$.

❸ Biến đổi phương trình về dạng $x = 2y + 3$.
Nhận xét rằng, với mọi $y \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $x = 2y + 3 \in \mathbb{Z}$.
Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(2y + 3; y)$ với $y \in \mathbb{Z}$.

❹ Biến đổi phương trình về dạng $2y = 3x - 4 \Leftrightarrow y = -2 + x + \dfrac{1}{2}x \quad (1)$.
Đặt $k = \dfrac{1}{2}x, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k, k \in \mathbb{Z}$.
Thay $x = 2k$ vào (1) ta được $y = -2 + 2k + k = -2 + 3k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.
Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(2k; -2 + 3k)$, với $k \in \mathbb{Z}$.

❺ Biến đổi phương trình về dạng $y = -3x + 8$.
Nhận xét rằng, với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $y = -3x + 8 \in \mathbb{Z}$.
Vậy phương trình đã cho có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(x; -3x + 8)$, với $x \in \mathbb{Z}$.

□

BÀI 8. Tìm khoảng cách từ gốc tọa độ đến các đường thẳng sau:

a) $4x + 3y + 20 = 0$

b) $2x - y = 4$

c) $3x = 2$

d) $-2y = 1$

✍ **LỜI GIẢI.**

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng $ax + by + c = 0$ ở ví dụ 8.

❶ Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng, ta có $h = \dfrac{|-20|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$.

❷ Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng, ta có $h = \dfrac{|4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

❸ Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng, ta có $h = \left|\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3}$.

❹ Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng, ta có $h = \left|\dfrac{1}{-2}\right| = \dfrac{1}{2}$.

□

BÀI 2 HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Định nghĩa 2. Giải hệ phương trình là tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ là nghiệm chung của hai phương trình.

2. Nghiệm và số các nghiệm của hệ - Minh họa bằng đồ thị

Với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

— Hệ số nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

— Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

— Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

3. Hệ phương trình tương đương

Định nghĩa 3. Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu mọi nghiệm của hệ này đều là nghiệm của hệ kia và ngược lại.

Định nghĩa 4. Phép biến đổi tương đương là phép biến đổi từ một hệ phương trình đến một hệ phương trình khác tương đương với nó.

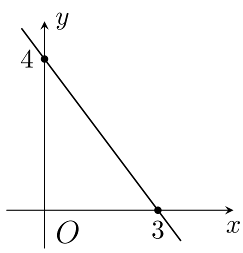
B CÁC DẠNG TOÁN

VÍ DỤ 1. Giải hệ phương trình sau bằng đồ thị $\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 8x + 6y = 24 \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$4x + 3y = 12 \Leftrightarrow y = -\dfrac{4}{3}x + 4$.

$8x + 6y = 24 \Leftrightarrow y = -\dfrac{4}{3}x + 4$.



Ta có đồ thị bên. Dựa vào đồ thị, hai đường thẳng trùng nhau nên có vô số điểm chung.

Vậy hệ có vô số nghiệm, mỗi nghiệm là tọa độ $(x; y)$ của một điểm trên đường thẳng $4x + 3y = 12$.

□

VÍ DỤ 2. Không cần vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây và giải thích vì sao?

a) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 3x - 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y = -3x \\ 3y = 2x. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - \dfrac{1}{3}y = 1. \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét các phương trình trong hệ, ta có

Đường thẳng $y = 3 - 2x$ có hệ số góc $a_1 = -2$.

Đường thẳng $y = 3x - 1$ có hệ số góc $a_2 = 3$.

Vì $a_1 \neq a_2$ nên hai đường thẳng này cắt nhau. Vậy hệ có một nghiệm duy nhất.

❷ Xét các phương trình trong hệ, ta có

Đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ có hệ số góc $a_1 = -\dfrac{1}{2}$ và $b_1 = 3$.

Đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ có hệ số góc $a_2 = -\dfrac{1}{2}$ và $b_2 = 1$.

Vì $a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$ nên hai đường thẳng này song song. Vậy hệ vô nghiệm.

❸ Xét các phương trình trong hệ, ta có

Đường thẳng $y = -\dfrac{3}{2}x$ có hệ số góc $a_1 = -\dfrac{3}{2}$.

Đường thẳng $y = \dfrac{2}{3}x$ có hệ số góc $a_2 = \dfrac{2}{3}$.

Vì $a_1a_2 = -1$ nên hai đường thẳng này vuông góc với nhau. Vậy hệ có một nghiệm duy nhất.

❹ Xét các phương trình trong hệ, ta có

Đường thẳng $3x - y = 3 \Leftrightarrow y = 3x - 3$.

Đường thẳng $x - \dfrac{1}{3}y = 1 \Leftrightarrow y = 3x - 3$.

Ta thấy hai đường thẳng này trùng nhau. Vậy hệ có vô số nghiệm.

□

VÍ DỤ 3. Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh họa bằng đồ thị)

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - y = -1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 8 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = 4. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

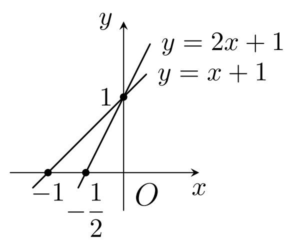
✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Nhận xét rằng

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{2}{1} = 2$ và $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{-1}{-1} = 1$, suy ra $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

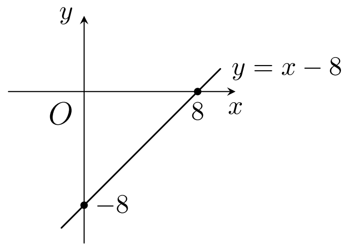


❷

Nhận xét rằng

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ và $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$, suy ra $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = 2 = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Vậy hệ có vô số nghiệm.

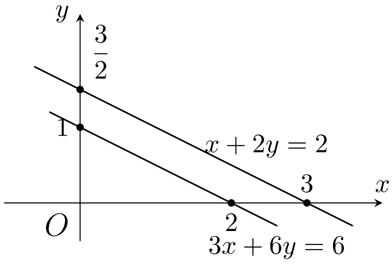


❸

Nhận xét rằng

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{3}{1} = 3$ và $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{6}{2} = 3$, suy ra $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = 3 \neq 2 = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Vậy hệ vô nghiệm.



□

VÍ DỤ 4. Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh họa bằng đồ thị)

a) $\begin{cases} 4x + 0y = 12 \\ x - y = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 0x - y = -2. \end{cases}$

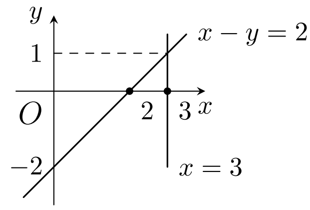
✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Nhận xét rằng

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{4}{1} = 4$ và $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{0}{-1} = 0$, suy ra $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

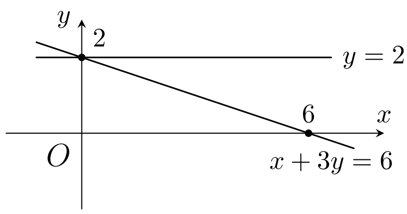


❷

Nhận xét rằng

$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{0}{1} = 0$ và $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{-1}{3}$, suy ra $\dfrac{a_2}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{b_1}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.



□

VÍ DỤ 5. Chứng tỏ rằng hệ phương trình $\begin{cases} ax - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

a) Có nghiệm duy nhất với $a = 3$.

b) Vô nghiệm với $a = -\dfrac{1}{2}$.

Hãy minh họa bằng đồ thị.

✍ **LỜI GIẢI.**

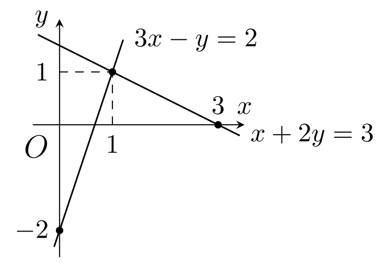
❶

Với $a = 3$, hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

Nhận xét rằng

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{3}{1} = 3$ và $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{-1}{2}$, suy ra $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.



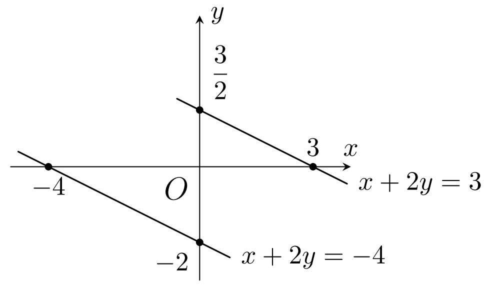
❷

Với $a = -\dfrac{1}{2}$, hệ phương trình có dạng $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

Nhận xét rằng

$\dfrac{a_1}{a_2} = -\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{b_1}{b_2} = -\dfrac{1}{2}$, suy ra $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = -\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Vậy hệ vô nghiệm.



□

VÍ DỤ 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + y = b \\ a_2x + y = b \end{cases}$.

❶ Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi a_1, a_2, b bất kì.

❷ Hệ có thể có vô số nghiệm được không?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Biến đổi hệ về dạng $\begin{cases} y = -a_1x + b & (d_1) \\ y = -a_2x + b & (d_2) \end{cases}$.

Nhận xét rằng, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ứng với hai phương trình trong hệ luôn cắt trục Oy (vì hệ số tự do bằng nhau) tại điểm $I(0; b)$.

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm $(0; b)$ với mọi a_1, a_2, b bất kì.

❷ Hệ có vô số nghiệm khi (d_1) trùng $(d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$.

□

VÍ DỤ 7. Sử dụng ba định lí đã biết tìm ba hệ phương trình tương đương với hệ sau $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Sử dụng định lí 1, ta được $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = 1 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$.

Sử dụng định lí 2, ta được $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ (x - y) - (x - 3y) = 2 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2y = -6 \end{cases}$.

Sử dụng định lí 3, ta được $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ (y + 2) - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ -2y = 6 \end{cases}$.

Nhận xét. *Trong lời giải trên, khi sử dụng định lí 2 và định lí 3, nếu chúng ta chỉ cần sử dụng thêm một lần nữa định lí 3, sẽ thu được nghiệm của hệ.*

□

VÍ DỤ 8. Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau tương đương

$$\begin{cases}2x-y=1\\3x-4y=2\end{cases} \text{ và } \begin{cases}2x-y=1\\x-y=\dfrac{3}{5}\end{cases}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có thể trình bày theo hai cách sau

Cách 1. Thực hiện phép biến đổi tương đương

$$\begin{cases}2x-y=1\\3x-4y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=1\\5x-5y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=1\\x-y=\dfrac{3}{5}\end{cases}.$$

Cách 2. Sử dụng định nghĩa

— Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{2}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

— Giải hệ thứ hai, ta được nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{2}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

Vậy hai hệ phương trình là tương đương.

Nhận xét. *Hai hệ phương trình tương đương trong trường hợp có nghiệm duy nhất luôn tồn tại hai cách chứng minh (sử dụng các phép biến đổi tương đương và sử dụng định nghĩa).*

□

VÍ DỤ 9. Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau tương đương

$$\begin{cases}x+2y=2\\2x+4y=4\end{cases} \text{ và } \begin{cases}3x+6y=6\\4x+8y=8\end{cases}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có thể trình bày theo hai cách sau

Cách 1. Thực hiện phép biến đổi tương đương

$$\begin{cases}x+2y=2\\2x+4y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+6y=6\\4x+8y=8\end{cases}.$$

Cách 2. Sử dụng định nghĩa

— Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ có vô số nghiệm thỏa mãn $(2-2y;y)$.

— Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ có vô số nghiệm thỏa mãn $(2-2y;y)$.

Vậy hai hệ phương trình là tương đương.

Nhận xét. *Hai hệ phương trình tương đương trong trường hợp có vố số nghiệm luôn tồn tại hai cách chứng minh (sử dụng các phép biến đổi tương đương và sử dụng định nghĩa).*

□

VÍ DỤ 10. Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương

a) $\begin{cases} x-2y=3 \\ x-2y=4 \end{cases}$ và $\begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-6y=12 \end{cases}$. b) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 6x-4y=3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+3y=1 \end{cases}$.

LỜI GIẢI.

1. Ta có thể trình bày theo hai cách sau

   Cách 1. Thực hiện phép biến đổi tương đương $\begin{cases} x-2y=3 \\ x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=3 \\ 3x-6y=12 \end{cases}$.

   Cách 2. Sử dụng định nghĩa

   — Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.

   — Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

   Vậy hai hệ phương trình là tương đương.

2. Ta thực hiện

   — Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.

   — Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

   Vậy hai hệ phương trình là tương đương.

Nhận xét. *Hai hệ phương trình tương đương trong trường hợp vô nghiệm, cách tốt nhất là sử dụng định nghĩa để chứng minh.*

□

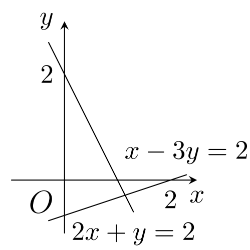
1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh họa bằng đồ thị)

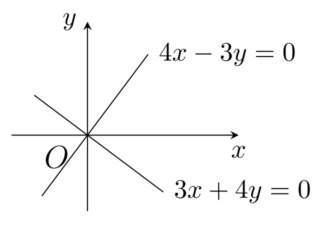
a) $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x+y=2. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 3x+4y=0. \end{cases}$

LỜI GIẢI.

1. Nhận xét rằng
   $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{-3}{1}=-3$, suy ra $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$.
   Vậy hệ có nghiệm duy nhất.



2. Nhận xét rằng
   $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{4}{3}$ và $\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{-3}{4}$, suy ra $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$.
   Vậy hệ có nghiệm duy nhất.



□

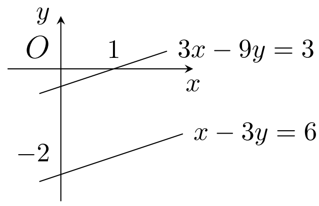
BÀI 2. Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh họa bằng đồ thị)

a) $\begin{cases} x-3y=6 \\ 3x-9y=3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=6 \\ 3x-3y=18. \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

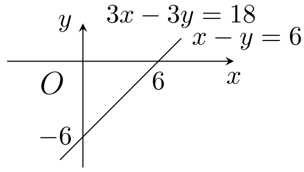
❶

Nhận xét rằng
$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{1}{3}$, suy ra $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq 2=\dfrac{c_1}{c_2}$.
Vậy hệ vô nghiệm.



❷

Nhận xét rằng
$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{1}{3}$.
Vậy hệ có vô số nghiệm.



□

BÀI 3. Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh họa bằng đồ thị)

a) $\begin{cases} x-0y=2 \\ 0x+4y=8. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0x+6y=24 \\ x-2y=1. \end{cases}$

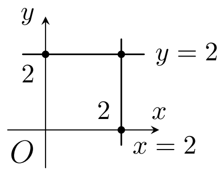
✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Nhận xét rằng

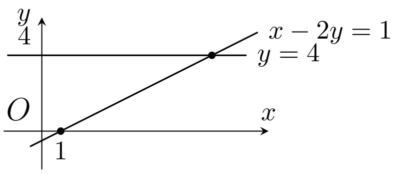
$a_1\cdot b_2\neq b_1\cdot a_2$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.



❷

Nhận xét rằng
$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{0}{1}=0$ và $\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{6}{-2}=-3$, suy ra $\dfrac{a_2}{a_1}\neq\dfrac{b_2}{b_1}$.
Vậy hệ có nghiệm duy nhất.



□

BÀI 4. Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng hệ phương trình $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x-ay=-3 \end{cases}$.

a) Có nghiệm duy nhất với $a=2$. b) Vô nghiệm với $a=\dfrac{2}{3}$.

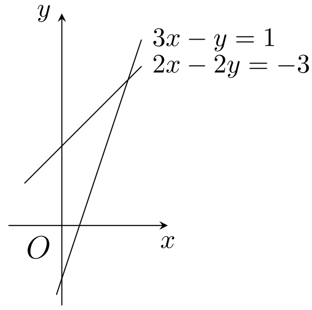
✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Với $a=2$, hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x-2y=-3 \end{cases}$.

Nhận xét rằng $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{3}{2}$ và $\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{1}{2}$, suy ra $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

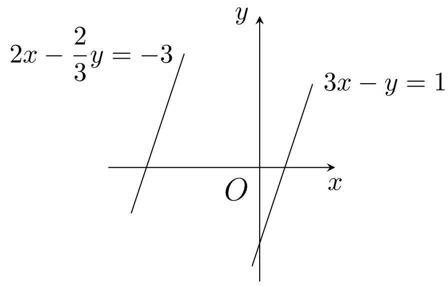


❷

Với $a = \dfrac{2}{3}$, hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - \dfrac{2}{3}y = -3 \end{cases}$.

Nhận xét rằng $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

Vậy hệ vô nghiệm.



□

BÀI 5. Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$.

a) Có vô số nghiệm với $a = 3$.

b) Vô nghiệm với $a \neq 3$.

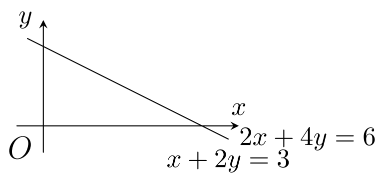
✍ LỜI GIẢI.

❶

Với $a = 3$, hệ phương trình có dạng $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$.

Nhận xét rằng $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ có vô số nghiệm.



❷ Với $a \neq 3$, hệ phương trình có dạng $\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$.

Nhận xét rằng $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

Vậy hệ vô nghiệm.

□

BÀI 6. Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng các hệ phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất

a) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x = n. \end{cases}$

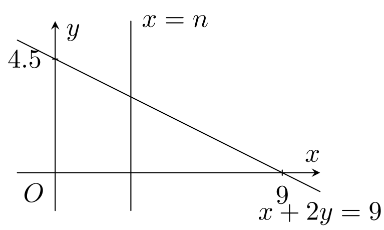
b) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ y = m. \end{cases}$

✍ LỜI GIẢI.

❶

Vì $x + 2y = 9$ là đường xiên, $x = n$ là đường thẳng song song với Oy nên đồ thị của $x + 2y = 9$ luôn cắt đồ thị của $x = n$ tại một điểm duy nhất.

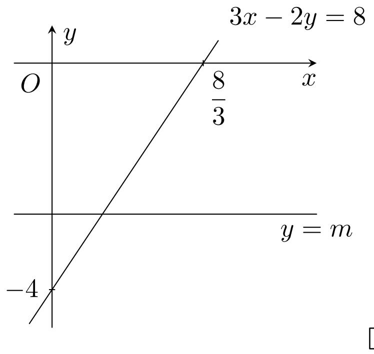
Vậy hệ luôn có nghiệm duy nhất $x = n$ và $y = \dfrac{1}{2}(9 - n)$.



❷

Vì $3x - 2y = 8$ là đường xiên, $y = m$ là đường thẳng song song với Ox nên đồ thị của $3x - 2y = 8$ luôn cắt đồ thị của $y = m$ tại một điểm duy nhất.

Vậy hệ luôn có nghiệm duy nhất $y = m$ và $x = \frac{1}{3}(8 + 2m)$.



□

BÀI 7. Cho hệ phương trình $\begin{cases} a^2x - y = b \\ 2ax - y = b \end{cases}$.

❶ Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi a, b bất kì.

❷ Hệ có nghiệm duy nhất khi nào?

❸ Hệ có vô số nghiệm khi nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Biến đổi hệ về dạng $\begin{cases} y = a^2x - b & (d_1) \\ y = 2ax - b & (d_2) \end{cases}$.

Nhận xét rằng, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ứng với hai phương trình trong hệ luôn cắt trục tung Oy (vì có hệ số tự do bằng nhau) tại điểm $I(0; b)$.

Vậy hệ luôn có nghiệm $(0; b)$ với mọi a, b bất kì.

❷ Hệ có nghiệm duy nhất khi

$$(d_1) \text{ cắt } (d_2) \Leftrightarrow a^2 \neq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a(a-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2. \end{cases}$$

❸ Hệ có vô số nghiệm khi

$$(d_1) \text{ trùng } (d_2) \Leftrightarrow a^2 = 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a(a-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2. \end{array}\right.$$

□

BÀI 8. Xác định a để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ ax - y = -3 \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta kí hiệu $\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ x + y = 2 & (2) \\ ax - y = -3 & (3) \end{cases}$.

Xét hệ phương trình tạo bởi (1) và (2) là $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. (*)

Để hệ có nghiệm, điều kiện (*) phải thỏa mãn phương trình (3), nghĩa là

$$a \cdot 1 - 1 = -3 \Leftrightarrow a = -2$$

Vậy $a = -2$ thỏa yêu cầu. □

BÀI 9. Sử dụng ba định lí đã biết tìm ba hệ phương trình tương đương với mỗi hệ sau

a) $\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x+8y=5. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x+4y=25. \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Sử dụng định lí 1, ta được $\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x+8y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}y=1 \\ 3x+8y=5 \end{cases}.$

Sử dụng định lí 2, ta được $\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x+8y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ (3x+8y)-(x+3y)=5-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+5y=3 \end{cases}.$

Sử dụng định lí 3, ta được $\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x+8y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-3y \\ 3(2-3y)+8y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-3y \\ -9y+8y=-1 \end{cases}.$

❷ Sử dụng định lí 1, ta được $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x+4y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{7}=1 \\ 3x+4y=25 \end{cases}.$

Sử dụng định lí 2, ta được $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x+4y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (3x+4y)-(x+y)=25-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ 2x+3y=18 \end{cases}.$

Sử dụng định lí 3, ta được $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x+4y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7-y \\ 3(7-y)+4y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7-y \\ y=4 \end{cases}.$

□

BÀI 10. Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương

a) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x+2y=4 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x+4y=8 \\ y=1 \end{cases}.$ b) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$ và $\begin{cases} 6x+2y=4 \\ y=2 \end{cases}.$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Thực hiện phép biến đổi tương đương.

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=7 \\ 2x+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=8 \\ y=1. \end{cases}$$

❷ Thực hiện phép biến đổi tương đương.

$$\begin{cases} 3x+y=2 \\ 2x+3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+2y=4 \\ 6x+9y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+2y=4 \\ 7y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+2y=4 \\ y=2. \end{cases}$$

□

BÀI 11. Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương

a) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 6x-9y=3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 4x-6y=2 \\ x-\dfrac{3}{2}y=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$ b) $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 10x+15y=2 \end{cases}$ và $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1 \\ 4x+6y=\dfrac{4}{5} \end{cases}.$

c) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 8x+9y=11 \\ 16x+18y=3 \end{cases}.$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Sử dụng định nghĩa.

— Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ có vô số nghiệm thỏa mãn $\left(x; \dfrac{2x-1}{3}\right)$.

— Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ có vô số nghiệm thỏa mãn $\left(x; \dfrac{2x-1}{3}\right)$.

Vậy hai hệ phương trình là tương đương.

❷ Sử dụng định nghĩa.

— Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.

— Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

Vậy hai hệ phương trình là tương đương.

❸ Sử dụng định nghĩa.

— Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.

— Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

Vậy hai hệ phương trình là tương đương.

□

BÀI 12. Tìm giá trị của m để các cặp hệ phương trình sau tương đương

❶ $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x+2y=4 \end{cases}$ và $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=m \end{cases}$.

❷ $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+5y=3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x+3y=2 \\ 3mx+(m^2+8)y=4m+2 \end{cases}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $x=2$ và $y=1$.

Hai hệ tương đương khi $(2;1)$ cũng là nghiệm của hệ còn lại, nghĩa là

$$\begin{cases} 2+1=3 \\ 2\cdot 2-1=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=3 \\ m=3 \end{cases} \Leftrightarrow m=3.$$

Thử lại, với $m=2$, hệ có dạng $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$. Giải hệ này, ta có nghiệm duy nhất là $(2;1)$.

Vậy $m=3$ thỏa yêu cầu.

❷ Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $x=-1$ và $y=1$.

Hai hệ tương đương khi $(-1;1)$ là nghiệm của hệ còn lại, nghĩa là

$$\begin{cases} -1+3\cdot 1=2 \\ 3m(-1)+(m^2+8)\cdot 1=4m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=2 \\ m^2-7m+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-1)(m-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=6. \end{array}\right.$$

Thử lại

— Với $m=1$ hệ có dạng $\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x+9y=6 \end{cases}$. Hệ có vô số nghiệm nên $m=1$ không thỏa.

— Với $m=6$ hệ có dạng $\begin{cases} x+3y=2 \\ 18x+44y=26 \end{cases}$. Hệ có nghiệm duy nhất $(-1;1)$.

Vậy $m=6$ thỏa yêu cầu.

□

BÀI 3 GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để xây dựng được thuật toán giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, chúng ta bắt đầu với việc giải hệ phương trình sau:

— $\begin{cases} 2x + y = 7 \quad (1) \\ x + 3y = 11 \quad (2) \end{cases}$

— Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi $y = 7 - 2x \quad (3)$

— Thay (3) vào phương trình (2), ta được $x + 3(7 - 2x) = 11 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$.

— Thay $x = 2$ vào (3), ta được $y = 7 - 2 \cdot 2 \Leftrightarrow y = 3$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2; 3)$.

— Bước 1: Chọn phương trình (1) và biểu diễn ẩn y theo x.

— Bước 2: Thay biểu thức của y vào phương trình (2), rồi tìm giá trị của x.

— Bước 3: Thay giá trị của x vào biểu thức trong bước 1 để tìm y.

— Bước 4: Kết luận nghiệm.

Từ đó, để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, ta thực hiện theo các bước sau:

— **Bước 1:** Chọn phương trình (1) và biểu diễn ẩn y theo x.

— **Bước 2:** Thay biểu thức của x vào phương trình kia rồi tìm giá trị của y.

— **Bước 3:** Thay giá trị của y vừa tìm được vào biểu thức của x để tìm giá trị của x.

— **Bước 4:** Kết luận nghiệm.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Giải hệ phương trình

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \quad (1) \\ 2x + y = -1 \quad (2) \end{cases}$

✍ LỜI GIẢI.

Ta lựa chọn một trong hai cách rút:

Cách 1: Thực hiện phép rút y.

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi $y = -2x - 1 \quad (3)$.

Thay (3) vào phương trình (1), ta được:

$y = -2 \cdot (-4) - 1 = 7$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(-4; 7)$. □

VÍ DỤ 2. *(Bài 14/tr 15 -SGK)*

Giải các hệ phương trình bằng phương pháp thế

❶ $\begin{cases} x+\sqrt{5}y=0 \quad (1) \\ \sqrt{5}x+3y=1-\sqrt{5} \quad (2) \end{cases}$ ❷ $\begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)x-3y=2+5\sqrt{3} \quad (1) \\ 4x+y=4-2\sqrt{3} \quad (2) \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{5}y=0 \quad (1) \\ \sqrt{5}x+3y=1-\sqrt{5} \quad (2) \end{cases}$

Xét phương trình (1) suy ra $x=-\sqrt{5}y$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$\sqrt{5}\cdot\left(-\sqrt{5}y\right)+3y=1-\sqrt{5} \Leftrightarrow -2y=1-\sqrt{5} \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Khi $y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ suy ra $x=\left(-\sqrt{5}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-5}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\dfrac{\sqrt{5}-5}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

❷ Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)x-3y=2+5\sqrt{3} \quad (1) \\ 4x+y=4-2\sqrt{3} \quad (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta suy ra $y=4-2\sqrt{3}-4x$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$\left(2-\sqrt{3}\right)x-3\left(4-2\sqrt{3}-4x\right)=2+5\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(14-\sqrt{3}\right)x=14-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=1$$

Khi $x=1$ suy ra $y=-2\sqrt{3}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(1;-2\sqrt{3}\right)$.

□

VÍ DỤ 3. *(Bài 15/tr 15 -SGK)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=1 \\ \left(a^2+1\right)x+6y=2a \end{cases}$

trong các trườn hợp sau

❶ $a=-1$ ❷ $a=0$ ❸ $a=1$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Khi $a=-1$, ta được hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+6y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 \\ x+3y=-1 \end{cases}$.

Dễ thấy hệ phương trình vô nghiệm.

❷ Khi $a=0$, ta được hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=1 \\ x+6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 \\ 3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(2;-\dfrac{1}{3}\right)$.

❸ Khi $a=1$, ta được hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 \\ x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x+3y=1$.

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn $x=1-3y$, $y\in\mathbb{R}$.

□

VÍ DỤ 4. *(Bài 17/tr 16 -SGK)*
Giải các hệ phương trình bằng phương pháp thế

❶ $\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=1\\ x+\sqrt{3}y=\sqrt{2}\end{cases}$ ❷ $\begin{cases}x-2\sqrt{2}y=\sqrt{5}\\ \sqrt{2}x+y=1-\sqrt{10}\end{cases}$ ❸ $\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)x-y=\sqrt{2}\\ x+\left(\sqrt{2}+1\right)y=1\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=1 & (1)\\ x+\sqrt{3}y=\sqrt{2} & (2)\end{cases}$.

Từ phương trình (2) suy ra $x=\sqrt{2}-\sqrt{3}y$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}y\right)-\sqrt{3}y=1\Leftrightarrow y\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)=1\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$$

Khi $y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$ thay vào (2) ta có

$$x+\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow x+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(1;\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}\right)$.

❷ Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-2\sqrt{2}y=\sqrt{5} & (1)\\ \sqrt{2}x+y=1-\sqrt{10} & (2)\end{cases}$

Từ phương trình (1) suy ra $x=\sqrt{5}-2\sqrt{2}y$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}y\right)+y=1-\sqrt{10}\Leftrightarrow 5y=1-2\sqrt{10}\Leftrightarrow y=\frac{1-2\sqrt{10}}{5}$$

Khi $y=\dfrac{1-2\sqrt{10}}{5}$ thay vào (1) ta có

$$x=\sqrt{5}+2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1-2\sqrt{10}}{5}\right)\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{5}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\dfrac{2\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{5};\dfrac{1-2\sqrt{10}}{5}\right)$.

❸ $\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)x-y=\sqrt{2} & (1)\\ x+\left(\sqrt{2}+1\right)y=1 & (2)\end{cases}$

Từ phương trình (1) ta suy ra $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$x+\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left[\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}\right]=1\Leftrightarrow 2x-2-\sqrt{2}=1\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{2}}{2}.$$

Khi $x=\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$ thay vào (2) ta có

$$\frac{3+\sqrt{2}}{2}+\left(\sqrt{2}+1\right)y=1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)y=-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{3+\sqrt{2}}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

□

VÍ DỤ 5. *(Bài 18/tr 16 -SGK)*

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+by=-4 \\ bx-ay=-5 \end{cases}$

❶ Xác định các hệ số a và b, biết hệ phương trình trên có nghiệm là $(1;-2)$.

❷ Xác định các hệ số a và b, biết hệ phương trình trên có nghiệm là $\left(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}\right)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Do $(1;-2)$ là nghiệm của hệ phương trình nên

$$\begin{cases} 2-2b=-4 \\ b+2a=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ b+2a=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=-4 \end{cases}$$

Vậy với $a=-4$ và $b=3$ thỏa mãn bài toán.

❷ Do $\left(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình nên

$$\begin{cases} 2\left(\sqrt{2}-1\right)+\sqrt{2}b=-4 \\ \left(\sqrt{2}-1\right)b-\sqrt{2}a=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}b=-2-2\sqrt{2} \\ \left(\sqrt{2}-1\right)b-\sqrt{2}a=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-\sqrt{2} \\ a=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2} \end{cases}$$

Vậy với $a=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$ và $b=-2-\sqrt{2}$.

□

VÍ DỤ 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+3y=-2 \\ m^2x-6y=4 \end{cases}$

❶ Giải hệ phương trình với $m=2$.

❷ Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Khi $m=2$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 4x-6y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 2x-3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3} \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(0;-\dfrac{2}{3}\right)$.

❷ Xét hệ phương trình $\begin{cases} mx+3y=-2 & (1) \\ m^2x-6y=4 & (2) \end{cases}$.

Từ phương trình (1) suy ra $3y=-2-mx \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{3}(2+mx)$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$m^2x+6\cdot\frac{1}{3}(2+mx)=4 \Leftrightarrow \left(m^2+2m\right)x=0 \quad (3)$$

Để hệ phương trình vô số nghiệm khi (3) vô số nghiệm.

Khi đó

$$m^2+2m=0 \Leftrightarrow m(m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} m&=0 \\ m&=-2 \end{aligned}\right.$$

Vậy với $m = 0$ và $m = 2$ hệ có vô số nghiệm.

□

Nhận xét. *1. Như vậy, trong lời giải trên để tận dụng phép thế trong một bài toán có hai câu hỏi chúng ta đã thực hiện theo 3 bước:*

— *Bước 1: Bằng phép thế, chuyển đổi tính chất của hệ thành tính chất của phương trình.*

— *Bước 2: Thực hiện câu a)*

— *Bước 3: Thực hiện câu b).*

Đó chính là cách thể hiện rất phổ biến khi học lên cao.

2. Chúng ta đều đã được biết rằng, có thể thực hiện yêu cầu " Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm" bằng cách dựa trên vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, cụ thể:

— *Trường hợp 1: Với $m = 0$, hệ phương trình có dạng*

$$\begin{cases} 0x + 3y = -2 \\ 0x - 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad \text{tùy ý} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

— *Trường hợp 2: Với $m \neq 0$ thì điều kiện để phương trình có vô số nghiệm là*

$$\frac{m}{m^2} = -\frac{3}{6} = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy với $m = 0$ và $m = 2$ hệ có vô số nghiệm.

Lưu ý: *Nếu ta không xét trường hợp $m = 0$ mà chỉ kiểm tra điều kiện để phương trình có vô số nghiệm* $\frac{m}{m^2} = -\frac{3}{6} = -\frac{2}{4}$
thì không được rút gọn mẫu số. Khi đó, ta phải biến đổi như sau

$$\frac{m}{m^2} = -\frac{3}{6} = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{m}{m^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m = -m^2 \Leftrightarrow m\left(2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

VÍ DỤ 7. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \quad (1) \\ mx + 2y = m \end{cases} \quad (2)$

❶ Tìm m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

❷ Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Từ phương trình (1) suy ra $y = -x + 1$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$mx + 2\left(1 - x\right) = m \Leftrightarrow \left(m - 2\right)x = m - 2 \quad (3)$$

Để hệ phương trình vô số nghiệm khi phương trình (3) vô số nghiệm suy ra

$$m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

❷ Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất.
Do đó $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.
Vậy $m \neq 2$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
Khi $m \neq 2$ ta có $(3) \Leftrightarrow x = 1$. Thay vào (1) suy ra $y = 0$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(1; 0)$.

□

VÍ DỤ 8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \quad (1) \\ mx - y = -m \quad (2) \end{cases}$

❶ Chứng tỏ rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

❷ Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là một điểm thuộc góc phần tư thứ nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Từ phương trình (2) suy ra $y = mx + m \quad (3)$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$x + m(mx + m) = 1 \Leftrightarrow \left(m^2 + 1\right)x = 1 - m^2 \Leftrightarrow x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

Khi $x = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}$ thay vào phương trình (3) ta được

$$y = m \cdot \frac{1 - m^2}{1 + m^2} + m \Leftrightarrow y = \frac{2m}{1 + m^2}$$

Vậy với mọi giá trị của m hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}; \dfrac{2m}{1 + m^2}\right)$.

❷ Để thỏa mãn bài toán khi

$$\begin{cases} \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} > 0 \\ \dfrac{2m}{1 + m^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

Vậy với $0 < m < 1$ hệ có nghiệm thỏa mãn bài toán.

□

Nhận xét. *1. Trong chủ đề 9, chúng ta đã thực hiện câu a) bằng phương pháp cộng và ở đó chúng ta cần xét hai trường hợp $m = 0$ và $m \neq 0$. Còn đối với phương pháp thế thì không cần phải như vậy, đó chính là một trong những ưu điểm của phương pháp thế so với phương pháp cộng.*

2. Với câu b), chúng ta đã sử dụng một trong các kết quả sau:

— $M(x, y) \in P(I) \Leftrightarrow x > 0$ *và* $y > 0$.

— $M(x, y) \in P(II) \Leftrightarrow x < 0$ *và* $y > 0$.

— $M(x, y) \in P(III) \Leftrightarrow x < 0$ *và* $y < 0$.

— $M(x, y) \in P(IV) \Leftrightarrow x > 0$ *và* $y < 0$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới các hệ phương trình được giải nhờ kiến thức của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (thường được gọi là các hệ phương trình quy về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn). Trước tiên, là các hệ phương trình được chuyển về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phép biến đổi tương đương.

VÍ DỤ 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \quad (1) \\ 4x - 3y = -2 \quad (2) \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét phương trình (1), ta có (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{2y}{3}$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$4 \cdot \frac{2y}{3} - 3y = -2 \Leftrightarrow 8y - 9y = 6 \Leftrightarrow y = 6.$$

Khi $y = 6$ suy ra $x = 4$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(4; 6)$. □

VÍ DỤ 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y - |x| = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

- Nếu $x \geq 0$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(2; 3)$.

- Nếu $x < 0$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} y + x = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 1 \\ 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{3} \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

So sánh với điều kiện không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(2; 3)$. □

VÍ DỤ 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 4 \quad (1) \\ |x - 2y| = 3 \quad (2) \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét phương trình (1) ta có (1) $\Leftrightarrow y = 4 - 2x \quad (3)$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$|x - 2(4 - 2x)| = 3 \Leftrightarrow |5x - 8| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 8 = 3 \\ 5x - 8 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{11}{5} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

- Khi $x = 1$ thay vào (3) suy ra $y = 2$.
- Khi $x = \dfrac{11}{5}$ thay vào (3) suy ra $y = -\dfrac{2}{5}$.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(1; 2)$ và $\left(\dfrac{11}{5}; -\dfrac{2}{5}\right)$. □

Nhận xét. *1. Như vậy, với việc sử dụng phương pháp thế chúng ta đã chuyển được hệ phương trình về một phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.*

2. Tất nhiên, chúng ta cũng có thể sử dụng phương pháp cộng để giải bằng việc chuyển đổi hệ ban đầu thành hai hệ $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ *và* $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -3. \end{cases}$

VÍ DỤ 12. *(Bài 19/tr 16 - Sgk)*
Biết rằng đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $x-a$ khi và chỉ khi $P(a)=0$. Hãy tìm các giá trị của m và n sao cho đa thức sau đồng thời chia hết cho $x+1$ và $x-3$.

$$P(x)=mx^3+(m-2)x^2-(3n-5)x-4n.$$

✍ LỜI GIẢI.
Do giả thiết đa thức $P(x)$ chia hết cho $x+1$ suy ra đa thức

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow -m+(m-2)+(3n-5)-4n=0 \Leftrightarrow -n-7=0 \Leftrightarrow n=-7 \quad (1)$$

Lập luận tương tự ta có

$$P(3)=0 \Leftrightarrow 27m+9(m-2)-3(3n-5)-4n=0 \Leftrightarrow 36m-13n-3=0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có $36m+91-3=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{22}{9}$.
Vậy với $m=-\dfrac{22}{9}$ và $n=-7$ thỏa mãn bài toán. □

VÍ DỤ 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+3y=17\\3x^2-2y=6\end{cases}$

✍ LỜI GIẢI.
Đặt $u=x^2$, điều kiện $u\geq 0$.
Khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases}2u+3y=17 & (1)\\3u-2y=6 & (2)\end{cases}$.
Từ phương trình (1) suy ra $2u=17-3y \Leftrightarrow u=\dfrac{17-3y}{2}$ (3). Thay vào phương trình (2) ta được

$$3\cdot\left(\frac{17-3y}{2}\right)-2y=6 \Leftrightarrow 3(17-3y)-4y=12 \Leftrightarrow 13y=39 \Leftrightarrow y=3.$$

Khi $y=3$ thay vào (3) suy ra $u=4$.
Khi $u=4$ suy ra $x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(2;3)$ và $(-2;3)$. □

VÍ DỤ 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+3y}=\sqrt{3x-1}\\5x-y=9\end{cases}$

✍ LỜI GIẢI.
Để hệ phương trình xác định khi $\begin{cases}x+3y\geq 0\\3x-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -3y\\x\geq \dfrac{1}{3}\end{cases} \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ ta có

$$\begin{cases}\sqrt{x+3y}=\sqrt{3x-1}\\5x-y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3y=3x-1\\5x-y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=1 & (1)\\5x-y=9\end{cases}\quad(2)$$

Từ phương trình (2) suy ra $y=5x-9\quad(3)$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2x-3\left(5x-9\right)=1\Leftrightarrow 13x=26\Leftrightarrow x=2.$$

Khi $x=2$ thay vào (3) suy ra $y=1$. So sánh với điều kiện $(*)$ thấy thỏa mãn.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(2;1)$. □

Nhận xét. — *Trong lời giải trên, việc biến đổi phương trình thứ nhất ta đã sử dụng phép biến đổi tương đương đã biết là*

$$\sqrt{f\left(x\right)}=\sqrt{g\left(x\right)}\Leftrightarrow\begin{cases}g\left(x\right)\geq 0\\f\left(x\right)=g\left(x\right)\end{cases}$$

— *Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm đến các hệ phương trình được chuyển về hệ phương trình bậc nhất bằng cách đặt ẩn phụ.*

VÍ DỤ 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{5}{y-2}=7\\\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y-2}=-1\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

Để hệ phương trình xác định khi $\begin{cases}x-1\neq 0\\y-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\y\neq 2\end{cases}\quad(*)$

Với điều kiện $(*)$ ta đặt $\begin{cases}u=\dfrac{1}{x-1}\\v=\dfrac{1}{y-2}\end{cases}$, khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}6u-5v=7\\3u+2v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6u-5v=7\\6u+4v=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6u-5v=7\\9v=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\v=-1\end{cases}$$

Khi $\begin{cases}u=2\\v=-1\end{cases}$ suy ra

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}=2\\\dfrac{1}{y-2}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{1}{2}\\y-2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=1\end{cases}$$

So sánh với điều kiện $(*)$ thấy thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{3}{2};1\right)$. □

VÍ DỤ 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases}|x-1|+|y-1|=2\\4\left|x-1\right|+3\left|y-1\right|=7\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $\begin{cases} u = |x-1| \\ v = |y-1| \end{cases}$, điều kiện $u, v \geq 0$.

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u+v=2 \\ 4u+3v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u+4v=8 \\ 4u+3v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện thỏa mãn.

Khi $u=1$ suy ra $|x-1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0. \end{array}\right.$

Khi $v=1$ suy ra $|y-1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-1=1 \\ y-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0. \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là $(2;2)$, $(2;0)$, $(0;2)$ và $(0;0)$. □

VÍ DỤ 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}+2\sqrt{y}=13 \\ 2\sqrt{x-1}-\sqrt{y}=4 \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

Để hệ phương trình xác định khi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ ta đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x-1} \\ v=\sqrt{y} \end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 3u+2v=13 \quad (1) \\ 2u-v=4 \quad (2) \end{cases}$.

Xét phương trình (2) ta suy ra $v=2u-4 \quad (3)$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$3u+2(2u-4)=13 \Leftrightarrow 7u=21 \Leftrightarrow u=3.$$

Khi $u=3$ thay vào (3) suy ra $v=2$.

Khi $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$ ta suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}=3 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=9 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=4 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện $(*)$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(10;4)$. □

DẠNG 2. Sử dụng hệ phương trình giải toán

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 18. Cho hai hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y=6 \\ 3x+y=9 \end{cases} \quad (I)$ và $\begin{cases} 2x-y=6 \\ y=m \end{cases} \quad (II)$.

Xác định m sao cho hai hệ phương trình trên tương đương.

✍ LỜI GIẢI.

Xét hệ phương trình (I) ta có

$$\begin{cases}2x-y=6\\3x+y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=6\\5x=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=6\\x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=3\end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất là $(3;0)$.

Để thỏa mãn bài toán khi $(3;0)$ là nghiệm của hệ (II) do đó $\begin{cases}2\cdot 3-0=6\\0=m\end{cases}\Leftrightarrow m=0$.

Khi $m=0$ hệ phương trình (II) trở thành $\begin{cases}2x-y=6\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$.

Vậy với $m=0$ hai hệ phương trình tương đương. □

VÍ DỤ 19. Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có nghiệm chung $2x^2+mx-1=0$ và $mx^2-x+2=0$.

✍ LỜI GIẢI.

Để thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases}2x^2+mx-1=0\\mx^2-x+2=0\end{cases}\quad(*)$$

có nghiệm.

Đặt $y=x^2$, điều kiện $y\geq 0$.

Khi đó hệ phương trình $(*)$ trở thành $\begin{cases}mx+2y-1=0 & (1)\\-x+my+2=0 & (2)\end{cases}$.

Xét phương trình (2) suy ra $x=my+2\quad(3)$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$m(my+2)+2y-1=0\Leftrightarrow\left(m^2+2\right)y=1-2m\Leftrightarrow y=\frac{1-2m}{m^2+2}.$$

Thay $y=\dfrac{1-2m}{m^2+2}$ vào (3) ta có

$$x=m\cdot\left(\frac{1-2m}{m^2+2}\right)+2\Leftrightarrow x=\frac{m(1-2m)+2\left(m^2+2\right)}{m^2+2}\Leftrightarrow x=\frac{m+4}{m^2+2}.$$

So sánh với điều kiện suy ra $1-2m\geq 0\Leftrightarrow m\leq\dfrac{1}{2}$.

Do $y=x^2$ nên

$$\left(\frac{m+4}{m^2+2}\right)^2=\frac{1-2m}{m^2+2}\Leftrightarrow(m+4)^2=(1-2m)\left(m^2+2\right)$$
$$m^3+6m+7=0\Leftrightarrow(m+1)\left(m^2-m+1\right)=0\quad(3)$$

Do $m^2-m+1=\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0\quad\forall m$. Nên $(3)\Leftrightarrow m+1=0\Leftrightarrow m=-1$.

So sánh với điều kiện thỏa mãn.

Vậy $m=-1$ hai phương trình có nghiệm chung. □

Nhận xét. *Lời giải trong ví dụ trên, chính là phương pháp hiệu quả để thực hiện yêu cầu "Tìm điều kiện của tham số để hai phương trình bậc hai có nghiệm chung", dạng toán này chúng ta sẽ gặp lại trong chương sau.*

1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Sử dụng phương pháp thế giải các hệ phương trình sau và minh họa nghiệm bằng đồ thị

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ -4x - 6y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \quad (1) \\ 2x + y = -4 \quad (2) \end{cases}$.

Xét phương trình (2) ta suy ra $y = -2x - 4 \quad (3)$. Thay vào phương trình (1) ta được

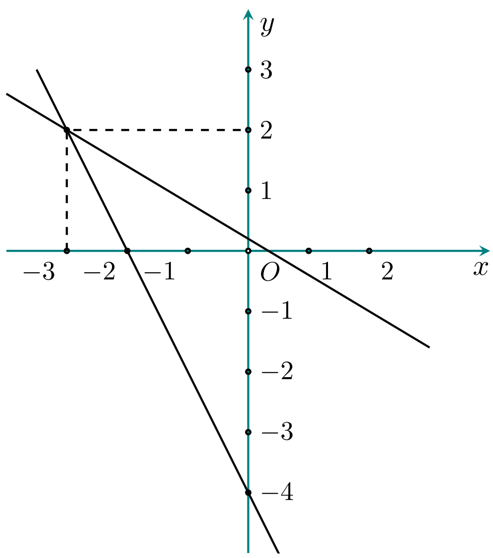
$$3x + 5(-2x - 4) = 1 \Leftrightarrow -7x = 21 \Leftrightarrow x = -3.$$

Thay vào (3) ta có $y = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(-3; 2)$.

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = -2x - 4$ và $y = \frac{1}{5}(1 - 3x)$ trên cùng hệ trục tọa độ.

Ta có



❷ Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \quad (1) \\ -4x - 6y = 12 \quad (2) \end{cases}$.

Xét phương trình (1) ta suy ra $y = \dfrac{2x + 6}{3} \quad (3)$. Thay vào phương trình (2) ta được

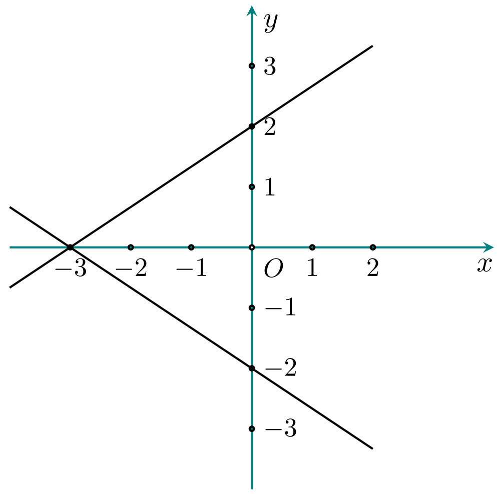
$$-4x - 6 \cdot \left(\frac{2x + 6}{3}\right) = -12 \Leftrightarrow -8x - 12 = 12 \Leftrightarrow x = -3.$$

Thay vào (3) ta có $y = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(-3; 0)$.

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = \dfrac{1}{3}(2x+6)$ và $y = \dfrac{1}{3}(-2x-6)$ trên cùng hệ trục tọa độ.

Ta có



❸ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 6 & (1) \\ 2x - 3y = 12 & (2) \end{cases}$.

Xét phương trình (1) ta suy ra $y = 6 - x \quad (3)$. Thay vào phương trình (2) ta được

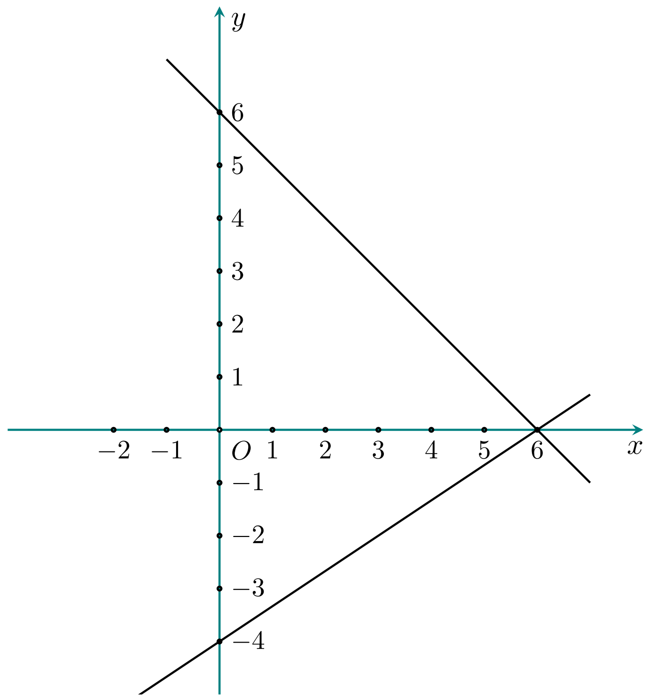
$$2x - 3(6-x) = 12 \Leftrightarrow 5x - 18 = 12 \Leftrightarrow x = 6.$$

Thay vào (3) ta có $y = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(6; 0)$.

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = 6 - x$ và $y = \dfrac{1}{3}(2x-12)$ trên cùng hệ trục tọa độ.

Ta có



❹ Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 11 & (1) \\ 5x - 3y = 3 & (2) \end{cases}$.

Xét phương trình (1) ta suy ra $x = 11 - 2x \quad (3)$. Thay vào phương trình (2) ta được

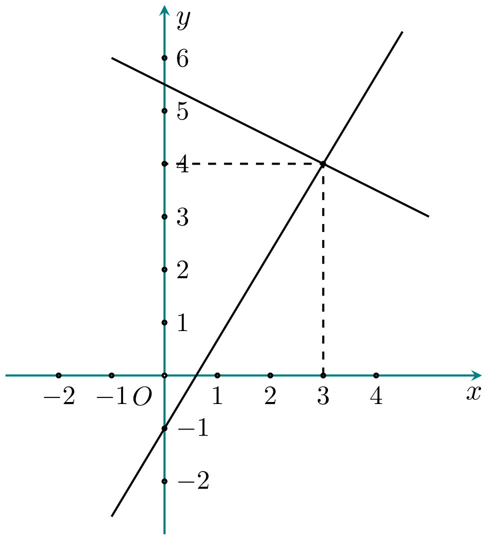
$$5(11-2y) - 3y = 3 \Leftrightarrow -13y + 55 = 3 \Leftrightarrow y = 4.$$

Thay vào (3) ta có $x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(3; 4)$.

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = \frac{1}{2}(11 - x)$ và $y = \frac{1}{3}(5x - 3)$ trên cùng hệ trục tọa độ.

Ta có



a) $(-3, 2)$.

b) $(-3, 0)$.

c) $(6, 0)$.

d) $(3, 4)$.

□

BÀI 2. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -4 \\ 12x + 16y - 5 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ (x - 2)(y + 3) = 3 + xy \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} = 1 \\ \dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{3} = 8 \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $\begin{cases} 3x + 4y = -4 \\ 12x + 16y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -4 \\ 3x + 4y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$.

Dễ thấy hệ phương trình vô nghiệm.

❷ Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 5 \\ (x - 2)(y + 3) = 3 + xy \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 5 \\ xy + 3x - 2y - 6 = 3 + xy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 5 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 10 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 5 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(-1; -6)$.

❸ Ta có

$$\begin{cases}\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{6}=1\\ \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2\\ \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}=8\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{6}=1\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{8}=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{6}=1\\ \dfrac{5x}{8}=10\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{6}=1\\ x=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=18\\ x=16\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(16, 18)$.

a) Hệ vô nghiệm b) Nghiệm của hệ là $(-1, -6)$ c) Nghiệm của hệ là $(16, 18)$

□

BÀI 3. Xác định hàm số $y = ax + b$ biết rằng đồ thị hàm số đó đi qua điểm $A(1; 2)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

✍ **LỜI GIẢI.**

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$ nên $2 = a + b \quad (1)$.

Mặt khác đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $1 = b \quad (2)$.

Thay (2) vào (1) suy ra $a + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy hàm số là $y = x + 1$.

Hàm số là $y = x + 1$. □

BÀI 4. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

a) $A(0; 3)$ và $B(1; 2)$ b) $A(1; 6)$ và $B(2; 0)$ c) $A(-3; 14)$ và $B(2; -1)$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Do đường thẳng đi qua hai $A(0; 3)$ và $B(1; 2)$ suy ra phương trình có dạng $y = ax + b$.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}b=3\\ a+b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=3\\ a=-1\end{cases}$.

Vậy phương trình đường thẳng là $y = -x + 3 \Leftrightarrow x + y = 3$.

❷ Do đường thẳng đi qua hai $A(1; 6)$ và $B(2; 0)$ suy ra phương trình có dạng $y = ax + b$.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}a+b=6\\ 2a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=6\\ a=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=12\\ a=-6\end{cases}$.

Vậy phương trình đường thẳng là $y = -6x + 12 \Leftrightarrow 6x + y = 12$.

❸ Do đường thẳng đi qua hai $A(-3; 14)$ và $B(2; -1)$ suy ra phương trình có dạng $y = ax + b$.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}-3a+b=14\\ 2a+b=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5a=-15\\ 2a+b=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-3\\ b=5\end{cases}$.

Vậy phương trình đường thẳng là $y = -3x + 5 \Leftrightarrow 3x + y = 5$.

a) $x + y = 3$ b) $6x + y = 12$ c) $3x + y = 5$

$\square$

BÀI 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 11 & (1) \\ 5x - 3y = m + 1 & (2) \end{cases}$

❶ Giải hệ phương trình với $m = 2$.

❷ Tìm giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Khi $m = 2$ hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 10y = 55 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y = 52 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(3; 4)$.

❷ Xét phương trình (1) suy ra $x = 11 - my$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$5(11 - my) - 3y = m + 1 \Leftrightarrow (5m + 3)\, y = 54 - m \quad (3)$$

- Nếu $5m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{5}$ phương trình (3) trở thành $0 \cdot y = \dfrac{273}{5}$.
Dễ thấy phương trình vô nghiệm nên hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $5m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{3}{5}$ thì (3) có nghiệm duy nhất suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
Vậy để hệ phương trình có nghiệm khi $m \neq -\dfrac{3}{5}$.

a) $(3; 4)$ b) $m \neq -\dfrac{3}{5}$

$\square$

BÀI 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3mx + 5y = 1 & (1) \\ 2x + my = -4 & (2) \end{cases}$

❶ Giải hệ phương trình với $m = 2$.

❷ Tìm giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Khi $m = 2$ hệ trở thành

$$\begin{cases} 6x + 5y = 1 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 1 \\ 6x + 6y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -13 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -13 \\ x = 11 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(11; -13)$.

❷ Xét phương trình (1) suy ra $5y = 1 - 3mx \Leftrightarrow y = \dfrac{1 - 3mx}{5}$.
Thay vào phương trình (2) ta có

$$2x + m \cdot \left(\frac{1 - 3mx}{5}\right) = -4 \Leftrightarrow \left(3m^2 - 10\right) x = m + 20 \quad (3)$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất.
Khi đó $3m^2 - 10 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{\dfrac{10}{3}}$.
Vậy để hệ phương trình có nghiệm khi $m \neq \pm\sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

a) $(11; -13)$. b) $m \neq \pm\sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

□

BÀI 7. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y = m & (1) \\ -3x + 9y = -12 & (2) \end{cases}$

❶ Tìm giá trị của m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

❷ Tìm giá trị của m để hệ phương trình vô nghiệm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét phương trình (1) suy ra $x = m + 3y$.

Thay vào phương trình (2) ta có

$$(-3) \cdot (m + 3y) + 9y = -12 \Leftrightarrow 3m = 12 \Leftrightarrow m = 4 \quad (3)$$

Để hệ phương trình có vô số nghiệm khi phương trình (3) có vô số nghiệm suy ra $m = 4$.

Vậy với $m = 4$ thỏa mãn bài toán.

❷ Theo kết quả trên để hệ phương trình vô nghiệm khi $m \neq 4$.

a) $m = 4$. b) $m \neq 4$.

□

BÀI 8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = 5 & (1) \\ 2x + y = m & (2) \end{cases}$

❶ Tìm giá trị của m để hệ phương trình có một nghiệm duy nhất.

❷ Tìm giá trị của m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

❸ Tìm giá trị của m để hệ phương trình vô nghiệm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét phương trình (2) suy ra $y = m - 2x$.

Thay vào phương trình (1) ta có

$$mx + 2 \cdot (m - 2x) = 5 \Leftrightarrow (m - 4) \cdot x = 5 - 2m \quad (3)$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất.

Suy ra $m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$. Vậy với $m \neq 4$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

❷ - Nếu $m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$ thì phương trình (3) trở thành $0 \cdot x = -3$.

Dễ thấy phương trình vô nghiệm suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

Theo kết quả trên khi $m \neq 4$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Vậy không tồn tại giá trị của m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

❸ Theo kết quả trên để hệ phương trình vô nghiệm khi $m = 4$.

a) $m \neq 4$. b) Không tồn tại giá trị m. c) $m = 4$.

□

BÀI 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = m & (1) \\ mx + y = 1 & (2) \end{cases}$

❶ Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm.

❷ Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét phương trình (1) suy ra $x = m + my \quad (3)$.

Thay vào phương trình (2) ta có

$$m \cdot (m + my) + y = 1 \Leftrightarrow \left(m^2 + 1\right) y = 1 - m^2 \quad (4)$$

Do $m^2 + 1 > 0 \quad \forall m$ nên phương trình (4) luôn có nghiệm duy nhất với mọi m.

Khi đó $\left(m^2 + 1\right) y = 1 - m^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1}$.

Do đó hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m

❷ Theo kết quả trên ta có $y = \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1}$ thay vào (3) ta được

$$x = m + m \cdot \left(\frac{1 - m^2}{m^2 + 1}\right) \Leftrightarrow x = \frac{2m}{m^2 + 1}$$

Do đó hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{2m}{m^2 + 1}; \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1}\right)$.

Để thỏa mãn bài toán khi

$$\begin{cases} \dfrac{2m}{m^2 + 1} > 0 \\ \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (1 - m)(1 + m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

a) Tự làm. b) $0 < m < 1$.

□

BÀI 10. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \quad (I)$.

Xác định m để hệ phương trình (I) trương đương với hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x - 2y = m \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \quad (*)$

b) $\begin{cases} 2x - my = 4 \\ (m + 1) x - 2y = 9 \end{cases} \quad (**)$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ 3x - 2(x - 2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất là $(5; 3)$.

Để thỏa mãn bài toán suy ra $(5; 3)$ là nghiệm của hệ $(*)$.

Thay vào $(*)$ suy ra $m = 4$.

Khi $m = 4$ hệ $(*)$ trở thành

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

Vậy hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất $(5; 3)$. Do đó $m = 4$ thỏa mãn.

❷ Tương tự ta suy ra $(5;3)$ là nghiệm của hệ $(**)$.
Dó đó
$$\begin{cases}10-3m=4\\5(m+1)-6=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m=6\\5m=10\end{cases}\Leftrightarrow m=2$$
. Khi $m=2$ hệ phương trình $(**)$ trở thành $\begin{cases}2x-2y=4\\3x-2y=9\end{cases}$.
Dựa vào kết quả trên suy ra $m=2$ thỏa mãn.

a) $m=4$ b) $m=2$

□

BÀI 11. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}x+y=2\\|2x-3y|=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-y=1\\|x-y|=|2y-1|\end{cases}$ c) $\begin{cases}|x-y|=12y-11\\2x-y=1\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có
$$\begin{cases}x+y=2\\|2x-3y|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\|2x-3\cdot(2-x)|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\|5x-6|=1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\\left[\begin{array}{l}5x-6=1\\5x-6=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7}{5}\\x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{7}{5}\\y=\dfrac{3}{5}\end{cases}\\\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\end{array}\right.$$
Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(1;1)$ và $\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

❷ Ta có
$$\begin{cases}2x-y=1\\|x-y|=|2y-1|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\|x-y|=|2y-1|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\|x-(2x-1)|=|2(2x-1)-1|\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\|1-x|=|4x-3|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\\left[\begin{array}{l}1-x=4x-3\\1-x=-4x+3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{4}{5}\\x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{4}{5}\\y=\dfrac{3}{5}\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$
Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ và $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

❸ Ta có

$$\begin{cases}|x-y|=12y-11\\2x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-y|=12y-11\\y=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-(2x-1)|=12(2x-1)-11\\y=2x-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|1-x|=24x-23\\y=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}24x-23\geq 0\\y=2x-1\\\left[\begin{array}{l}1-x=24x-23\\1-x=-24x+23\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}24x-23\geq 0\\y=2x-1\\\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{22}{25}\\x=\dfrac{22}{23}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{22}{23}\\y=\dfrac{21}{23}\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{22}{25}\\y=\dfrac{23}{25}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $\left(\dfrac{22}{23};\dfrac{21}{23}\right)$ và $\left(\dfrac{24}{25};\dfrac{23}{25}\right)$.

a) $(1;1)$ và $\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{3}{5}\right)$. b) $\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ và $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. c) $\left(\dfrac{22}{23};\dfrac{21}{23}\right)$ và $\left(\dfrac{24}{25};\dfrac{23}{25}\right)$.

□

BÀI 12. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}|x|-y+1=0\\2x-|y|-1=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}|x|+2|y|=3\\7x+5y=2\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ - Nếu $y\geq 0$ hệ trở thành

$$\begin{cases}|x|-y+1=0\\2x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|-2x+2=0 & (1)\\2x-y-1=0 & (2)\end{cases}$$

Xét phương trình (1) ta có

$$(1)\Leftrightarrow|x|=2x-2\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2\geq 0\\\left[\begin{array}{l}x=2x-2\\x=-2x+2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Khi $x=2$ thay vào (2) suy ra $3-y=0\Leftrightarrow y=3$.

So sánh điều kiện suy ra $(2;3)$ là nghiệm của hệ phương trình.

- Nếu $y<0$ hệ trở thành

$$\begin{cases}|x|-y+1=0\\2x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|+2x=0 & (3)\\2x-y-1=0 & (4)\end{cases}$$

Xét phương trình (3) ta có

$$(1)\Leftrightarrow|x|=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}-2x\geq 0\\\left[\begin{array}{l}x=-2x\\x=2x\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=0$$

Khi $x = 0$ thay vào (4) suy ra $-y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$.
So sánh điều kiện suy ra $(0; -1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

❷ - Nếu $x \geq 0$ hệ trở thành

$$\begin{cases} x + 2|y| = 3 \\ 7x + 5y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14|y| - 5y = 19 & (1') \\ 7x + 5y = 2 & (2') \end{cases}$$

Xét phương trình $(1')$ ta có

$$(1') \Leftrightarrow 14|y| = 5y + 19 \Leftrightarrow \begin{cases} 5y + 19 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 14y = 5y + 19 \\ 14y = -5y - 19 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\dfrac{19}{5} \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{19}{9} \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{19}{9} \\ y = -1 \end{array}\right.$$

$+$ Khi $y = -1$ thay vào $(2')$ suy ra $7x - 5 = 2 \Leftrightarrow x = 1$.
$+$ Khi $y = \dfrac{19}{9}$ thay vào $(2')$ suy ra $7x + \dfrac{95}{9} = 2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{11}{9}$.
So sánh điều kiện suy ra $(1; -1)$ là nghiệm của hệ phương trình.
- Nếu $x < 0$ hệ trở thành

$$\begin{cases} -x + 2|y| = 3 \\ 7x + 5y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14|y| + 5y = 23 & (3') \\ 7x + 5y = 2 & (4') \end{cases}$$

Xét phương trình $(3')$ ta có

$$(3') \Leftrightarrow 14|y| = 23 - 5y \Leftrightarrow \begin{cases} 23 - 5y \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 23 - 5y \\ y = -23 + 5y \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \dfrac{23}{5} \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{23}{6} \\ y = \dfrac{23}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{23}{6}$$

Khi $y = \dfrac{23}{6}$ thay vào $(4')$ suy ra $7x + \dfrac{115}{6} = 2 \Leftrightarrow x = -\dfrac{113}{42}$.
So sánh điều kiện suy ra $\left(-\dfrac{113}{42}; \dfrac{23}{6}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

a) Nghiệm của hệ $(2; 3)$ và $(0; -1)$ b) Nghiệm của hệ $(1; -1)$ và $\left(-\dfrac{113}{42}; \dfrac{23}{6}\right)$

□

BÀI 13. Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có nghiệm chung

$$mx^2 + x + 1 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + mx + 1 = 0$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Để thỏa mãn bài toán khi hệ phương trình $\begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 + mx + 1 = 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Mà

$$\begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 + mx + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \\ mx^2 + x - x^2 - mx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \\ x^2\left(m - 1\right) + x\left(1 - m\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \\ \left(m - 1\right)\left(x^2 - x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \quad (*) \\ \left[\begin{array}{l} m - 1 = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

- Khi $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thay vào $(*)$ suy ra $x^2 + x + 1 = 0$. Dễ thấy phương trình vô nghiệm.

- Khi $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

+ Khi $x = 0$ thay vào $(*)$ không thỏa mãn.

+ Khi $x = 1$ thay vào $(*)$ suy ra $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Giá trị của $m = -2$ □

BÀI 4 GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để xây dựng được thuật toán giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng, chúng ta hãy bắt đầu với việc giải hệ phương trình sau:

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases} \xrightarrow{\text{Bước 1}}$ Biến đổi hệ số của ẩn x trong hệ bằng nhau, bằng cách nhân phương trình thứ hai với 2.

Lần lượt thực hiện các phép biến đổi hệ về dạng:

$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + 6y = 22 \end{cases} \xrightarrow{\text{Bước 2}}$ Trừ theo vế hai phương trình để khử ẩn x và thu được một phương trình chỉ chứa y.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -15 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Bước 3}}$ Giải phương trình chỉ chứa ẩn y, để tìm giá trị của y.

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Bước 4}}$ Thay gia trị của y vào phương trình còn lại, để được một phương trình chỉ chứa ẩn x.

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 2x + 3 = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Bước 5}}$ Giải phương trình chỉ chứa ẩn x, rồi kết luận về nghiệm của hệ.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2; 3)$.

Từ đó, để giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi để các hệ số của một ẩn (giả sử x) có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

Bước 2: Cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình để khử ẩn x.

Bước 3: Giải phương trình tìm giá trị của y.

Bước 4: Thay giá trị y vừa tìm được vào một trong hai phương trình ban đầu để tìm giá trị của x.

Bước 5: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

⚠ ***Chú ý***

1. *Để cho gọn lời giải, thông thường các bước 3 và bước 4 được kết hợp lại với nhau.*

2. *Trong một vài trường hợp, bước 1 và bước 3 không cần thực hiện, ví dụ:*

a) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 4 - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Giải hệ phương trình

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y = 4\sqrt{6}. \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta lựa chọn một trong hai cách khử:

Cách 1. Ta thực hiện phép khử x.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases} \overset{\times 4}{\underset{\times 3}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 12x + 16y = 72 \\ 12x - 9y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25y = 75 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 4x - 3 \cdot 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2; 3)$.

Cách 2. Ta thực hiện phép khử y.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases} \overset{\times 3}{\underset{\times 4}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 9x + 12y = 54 \\ 16x - 12y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x = 50 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3 \cdot 2 + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2; 3)$.

❷ Ta thực hiện

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y = 4\sqrt{6} \end{cases} \overset{\times \sqrt{2}}{\underset{\times \sqrt{3}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \sqrt{6}x - 2y = \sqrt{2} \\ \sqrt{6}x + 9y = 12\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = 11\sqrt{2} \\ \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(\sqrt{3}; \sqrt{2}\right)$.

□

Nhận xét. *Như vậy, trong lời giải trên:*

1) *Qua ví dụ trên, các em học sinh hiểu thêm rằng việc nhân hệ số để một ẩn trong hệ có hệ số bằng nhau hoặc đối nhau, trong nhiều trường hợp cần thực hiện phép nhân ở cả hai phương trình của hệ (trong ví dụ là 3 và 4 cho mỗi phương trình).*

2) *Ở câu b), ta cần nhân hai phương trình của hệ theo thứ tự với $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$ mới nhận được hệ số của x trong hệ là bằng nhau.*

Trong thực tế, chúng ta sẽ gặp dạng toán cần thực hiện theo hai bước:

Bước 1: *Thiết lập hệ phương trình;*

Bước 2: *Giải hệ nhận được trong bước 1.*

VÍ DỤ 2 (Bài 21/trang 19 - SGK). Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = 1 \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2. \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ký hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1), (2).

Nhân hai vế của (1) với $-\sqrt{2}$, ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} -2x + 3\sqrt{2}y = -\sqrt{2} \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{2}y = -2 - \sqrt{2} \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1 - \sqrt{2}}{4} \\ x = \dfrac{\sqrt{2} - 6}{8}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{\sqrt{2} - 6}{8}; \dfrac{-1 - \sqrt{2}}{4}\right)$.

❷ Ký hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1), (2).

Nhân hai vế của (1) với $\sqrt{2}$, ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 5x\sqrt{6} + y\sqrt{2} = 4 \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x\sqrt{6} = 6 \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m. \end{cases}$

❶ Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất;

❷ Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < 1$ và $y < 1$;

❸ Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x và y không phụ thuộc vào m.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Nhận xét rằng với $m = 0$, hệ có dạng $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0$ hệ có nghiệm duy nhất.

Với $m \neq 0$, biến đổi hệ về dạng

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ m^2x - my = -m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 1)x = 1 - m^2 \\ x + my = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1} \\ \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1} + my = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - m^2}{m^2 + 1} \\ y = \dfrac{2m}{m^2 + 1}. \end{cases}$$

Tức là, với $m \neq 0$ hệ cũng có nghiệm duy nhất.

Vậy với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất.

❷ Để nghiệm $(x;y)$ của hệ thỏa mãn $x<1$ và $y<1$, điều kiện là:

$$\begin{cases}\dfrac{1-m^2}{m^2+1}<1\\ \dfrac{2m}{m^2+1}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-m^2<m^2+1\\ 2m<m^2+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2>0\\ (m-1)^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ m-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ m\neq 1.\end{cases}$$

Vậy với $m\neq 0$ và $m\neq 1$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

❸ Nhận xét rằng

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \left(\frac{1-m^2}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2=\frac{(1-m^2)^2+4m^2}{(m^2+1)^2}\\ &=\frac{m^4-2m^2+1+4m^2}{(m^2+1)^2}=\frac{m^4+2m^2+1}{(m^2+1)^2}=\frac{(m^2+1)^2}{(m^2+1)^2}=1.\end{aligned}$$

Vậy ta thu được hệ thức $x^2+y^2=1$.

□

⚠ ***Chú ý.***

1) *Trong lời giải câu a), nếu chúng ta không xét riêng trường hợp $m=0$ và $m\neq 0$ sẽ vi phạm phép biến đổi tương đương.*

2) *Trong phạm vi kiến thức THCS, khó có thể giải thích một cách đầy đủ cho các em học sinh hiểu được tại sao lại có được nhận xét về x^2+y^2. Tuy nhiên, đối với các em học sinh thực sự muốn nâng cao kiến thức thì hãy tham khảo cuốn **Phương pháp giải toán đại số** của Lê Hồng Đức do NXB Hà Nội ấn hành.*

VÍ DỤ 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+my=2\\ mx+y=m+1.\end{cases}$

❶ Giải hệ phương trình với $m=1$;

❷ Chứng tỏ rằng với mọi $m\neq\pm1$ hệ luôn có nghiệm duy nhất;

❸ Tìm giá trị của m để nghiệm duy nhất $(x;y)$ của hệ thỏa mãn $x+y<0$;

❹ Tìm m nguyên để hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Với $m=1$, hệ có dạng $\begin{cases}x+y=2\\ x+y=2\end{cases}$ $\Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm thỏa mãn $(x;2-x)$.

❷ Nhận xét rằng với $m=0$, hệ có dạng $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$ $\Rightarrow m=0$ hệ có nghiệm duy nhất. Với $m\neq 0$, biến đổi hệ về dạng

$$\begin{cases}mx+m^2y=2m\\ mx+y=m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m^2-1)y=m-1\\ mx+y=m+1\end{cases} \overset{m\neq\pm1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases}y=\dfrac{1}{m+1}\\ mx+\dfrac{1}{m+1}=m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{m+2}{m+1}\\ y=\dfrac{1}{m+1}.\end{cases}$$

Tức là, với $m\neq 0$ và $m\neq\pm1$ hệ cũng có nghiệm duy nhất.

Vậy, với mọi $m\neq\pm1$ hệ luôn có nghiệm duy nhất.

❸ Để nghiệm duy nhất của hệ thỏa mãn $x+y<0$, điều kiện là
$$\frac{m+2}{m+1}+\frac{1}{m+1}<0 \Leftrightarrow \frac{m+3}{m+1}<0 \Leftrightarrow -3<m<-1,$$
thỏa mãn điều kiện duy nhất của nghiệm.

Vậy với $-3<m<-1$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

❹ Để nghiệm nguyên duy nhất của hệ nguyên điều kiện cần là $m+1$ là ước của 1 (gồm có ± 1), ta lập bảng:

$m+1$	-1	1
m	-2	0
$y=\dfrac{1}{m+1}$	-1	1
$x=\dfrac{m+2}{m+1}$	0	2

Vậy, với $m=-2$ hoặc $m=0$ hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

□

VÍ DỤ 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}\\ 3x-2y=5.\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

Điều kiện: $y\neq 0$.

Ta thực hiện
$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}\\ 3x-2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=3y\\ 3x-2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-3y=0\\ 3x-2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6x-9y=0\\ 3x-2y=5\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}5y=10\\ 3x-2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\ 3x-2\cdot 2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=2.\end{cases}$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $(3;2)$. □

Nhận xét. *Hẳn các em học sinh cũng thấy, ở dạng ban đầu hệ phương trình trong ví dụ trên không phải là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Tuy nhiên, chỉ cần một vài phép biến đổi đơn giản chúng ta đã chuyển được về hệ bậc nhất hai ẩn, để từ đó sử dụng phương pháp cộng để tìm nghiệm.*

VÍ DỤ 6 (Bài 26/Trang 19 - Sgk). Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}2(x+y)+3(x-y)=4\\ (x+y)+2(x-y)=5\end{cases}$

b) $\begin{cases}2(x-2)+3(1+y)=-2\\ 3(x-2)-2(1+y)=-3.\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1. Thực hiện việc rút gọn các phương trình của hệ đã cho rồi đưa về hệ:

$$\begin{cases}5x-y=4\\3x-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-y=4\\2x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=-\dfrac{13}{2}.\end{cases}$$

Cách 2. Đặt ẩn phụ $X=x+y$; $Y=x-y$, ta có hệ:

$$\begin{cases}2X+3Y=4\\X+2Y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2X+3Y=4\\2X+4Y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2X+3Y=4\\Y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=-7\\Y=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-7\\x-y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=-1\\x-y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=-\dfrac{13}{2}.\end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{13}{2}\right)$.

❷ Ta có

$$\begin{cases}2(x-2)+3(1+y)=-2\\3(x-2)-2(1+y)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=-1\\3x-2y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+6y=-2\\9x-6y=15\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}13x=13\\9x-6y=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1.\end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1;-1)$.

□

VÍ DỤ 7 (Bài 27/Trang 19 - Sgk). Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1\\\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=5\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{y-1}=2\\\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{y-1}=1.\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $u=\dfrac{1}{x}$ và $v=\dfrac{1}{y}$, ta đưa hệ phương trình về dạng

$$\begin{cases}u-v=1\\3u+4v=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4u-4v=4\\3u+4v=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7u=9\\3u+4v=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{9}{7}\\v=\dfrac{2}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{9}\\y=\dfrac{7}{2}.\end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{7}{2}\right)$.

❷ Đặt $u=\dfrac{1}{x-2}$ và $v=\dfrac{1}{y-1}$, ta đưa hệ phương trình về dạng

$$\begin{cases}u-v=2\\2u+3v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3u-3v=6\\2u+3v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5u=7\\2u+3v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{7}{5}\\v=\dfrac{3}{5}.\end{cases}$$

— Từ $u=\dfrac{7}{5}\Rightarrow\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{7}{5}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{7}+2\Leftrightarrow x=\dfrac{19}{7}$.

— Từ $v = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{1}{y-1} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{3} + 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{8}{3}$.

Vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{19}{7}; \dfrac{8}{3}\right)$.

□

VÍ DỤ 8. Tìm giá trị của m để các cặp hệ phương trình sau tương đương:

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ và $\begin{cases} mx - y = m \\ x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + 8y = 5 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + my = 2. \end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Giải hệ thứ nhất ta được nghiệm duy nhất $x = 3$ và $y = 4$.

Do đó, muốn hai hệ tương đương thì $(3; 4)$ cũng phải là nghiệm của hệ còn lại, tứ là $\begin{cases} m \cdot 3 - 4 = m \\ 3 - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2m = 4 \\ -1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Thử lại, với $m = 2$ hệ có dạng $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$, dễ thấy, hệ trên có nghiệm duy nhất $(3; 4)$.

Vậy, với $m = 2$ hai hệ phương trình đã cho tương đương.

❷ Giải hệ thứ nhất ta được nghiệm duy nhất $x = -1$ và $y = 1$.

Do đó, muốn hai hệ tương đương thì $(-1; 1)$ cũng phải là nghiệm của hệ còn lại, tứ là $\begin{cases} -1 + 2 \cdot 1 = 1 \\ 2 \cdot (-1) + m \cdot 1 = \end{cases}$

$\begin{cases} 1 = 1 \\ m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$.

Thử lại, với $m = 4$ hệ có dạng $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$, dễ thấy, hệ trên có vô số nghiệm, do đó không thỏa mãn.

Vậy, không tồn tại m để hai hệ phương trình đã cho tương đương.

□

Nhận xét. *Như vậy, với yêu cầu "Tìm điều kiện của tham số để hai hệ phương trình tương đương" trong trường hợp có nghiệm duy nhất chúng ta nhất thiết phải thực hiện bước thử lại, bởi khi hệ thứ nhất có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ còn hệ thứ hai có vô số nghiệm và nhận $(x_0; y_0)$ làm một nghiệm thì hai hệ không thể được gọi là tương đương.*

🗀 DẠNG 2. Sử dụng hệ phương trình giải toán

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 9 (Bài 26/Trang 19 - Sgk). Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(2; -2)$ và $B(-1; 3)$;

b) $A(-4; -2)$ và $B(2; 1)$;

c) $A(3;-1)$ và $B(-3;2)$; d) $A\left(\sqrt{3};2\right)$ và $B(0;2)$.

LỜI GIẢI.

❶ Ta có:

— $A(-2;2)\in(d)\colon y=ax+b\Leftrightarrow -2=2a+b.$ (1)

— $B(-1;3)\in(d)\colon y=ax+b\Leftrightarrow 3=-a+b.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases}2a+b=-2\\ -a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a=-5\\ -a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{5}{3}\\ b=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

Vậy đồ thị cần tìm là $(d)\colon y=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{4}{3}$.

❷ Ta có:

— $A(-4;-2)\in(d)\colon y=ax+b\Leftrightarrow -2=-4a+b.$ (3)

— $B(2;1)\in(d)\colon y=ax+b\Leftrightarrow 1=2a+b.$ (4)

Từ (3) và (4), ta có $\begin{cases}-4a+b=-2\\ 2a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6a=-3\\ 2a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=0.\end{cases}$

Vậy đồ thị cần tìm là $(d)\colon y=\dfrac{1}{2}x$.

❸ Tương tự, ta có đồ thị cần tìm là $(d)\colon y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

❹ Tương tự, ta có đồ thị cần tìm là $(d)\colon y=2$.

□

Chú ý. *Chúng ta đều đã biết, mọi đường thẳng trong mặt phẳng đều có phương trình dạng $ax+by=c$, với a, b không đồng thời bằng 0 và một đường thẳng được hoàn toàn xác định khi biết hai điểm phân biệt thuộc nó. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa cách lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.*

VÍ DỤ 10. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;-6)$ và $B(4;3)$.

LỜI GIẢI.

Giả sử đường thẳng có phương trình $ax+by=c$, từ giả thiết:

— $A(-2;-6)$ thuộc đường thẳng, suy ra $a\cdot(-2)+b\cdot(-6)=c\Leftrightarrow -2a-6b=c.$ (1)

— $B(4;3)$ thuộc đường thẳng, suy ra $a\cdot 4+b\cdot 3=c\Leftrightarrow 4a+3b=c.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình

$$\begin{cases}-2a-6b=c\\ 4a+3b=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a-6b=c\\ 8a+6b=2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a=3c\\ 8a+6b=2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{c}{2}\\ 8\cdot\dfrac{c}{2}+6b=2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{c}{2}\\ b=-\dfrac{c}{3}.\end{cases}$$

Vậy đường thẳng có phương trình $\dfrac{c}{2}x-\dfrac{c}{3}y=c\Leftrightarrow 3x-2y=6$. □

VÍ DỤ 11. Xác định các hệ số a, b của phương trình $ax^2-x+b=0$, biết nó có hai nghiệm $x_1=-2$ và $x_2=3$.

LỜI GIẢI.

Với giả thiết:

— $x_1 = -2$ là nghiệm của phương trình, suy ra $a \cdot (-2)^2 - (-2) + b = 0 \Leftrightarrow 4a + b = -2$. (1)

— $x_2 = 3$ là nghiệm của phương trình, suy ra $a \cdot 3^2 - 3 + b = 0 \Leftrightarrow 9a + b = 3$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình

$$\begin{cases} 4a + b = -2 \\ 9a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 5 \\ 9a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 9 \cdot 1 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6. \end{cases}$$

Vậy, phương trình có dạng $x^2 - x - 6 = 0$. □

VÍ DỤ 12 (Bài 25/Trang 19 - Sgk). Ta biết rằng một đa thức bằng 0 khi và chỉ khi tất cả các hệ số của nó bằng 0. Hãy tìm các giá trị của m và n để đa thức sau (với biến số x) bằng đa thức 0:

$$P(x) = (3m - 5n + 1)x + (4m - n - 10).$$

✍ LỜI GIẢI.

Ta có

$$\begin{aligned} P(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 5n + 1 = 0 \\ 4m - n - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 5n = -1 \\ 4m - n = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 5n = -1 \\ -20m + 5n = -50 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 5n = -1 \\ -17m = -51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy, với $m = 3$ và $n = 2$ thì đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài. □

VÍ DỤ 13. Cho đa thức $f(x) = ax^3 - (2 - a)x^2 + (5 - 3b)x - 4b$.

❶ Xác định các hệ số a, b của đa thức, biết nó chia hết cho $x - 3$ và $x + 1$.

❷ Với a, b tìm được ở trên, hãy phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử.

✍ LỜI GIẢI.

❶ Với giả thiết:

— $f(x)$ chia hết cho $x - 3$, suy ra

$$f(3) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 3^3 - (2 - a) \cdot 3^2 + (5 - 3b) \cdot 3 - 4b = 0 \Leftrightarrow 36a - 13b = 3. \quad (1)$$

— $f(x)$ chia hết cho $x + 1$, suy ra

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow a \cdot (-1)^3 - (2 - a) \cdot (-1)^2 + (5 - 3b) \cdot (-1) - 4b = 0 \Leftrightarrow b = -7. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình

$$\begin{cases} 36a - 13b = 3 \\ b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36a - 13 \cdot (-7) = 3 \\ b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{22}{9} \\ b = -7. \end{cases}$$

❷ Với kết quả trên, $f(x)$ có dạng

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= -\frac{22}{9}x^3 - \left(2 + \frac{22}{9}\right)x^2 + (5 + 21)x + 28 \\ &= -\frac{22}{9}x^3 - \frac{40}{9}x^2 + 26x + 28 \\ &= (x - 3)(x + 1)\left(-\frac{22}{9}x - \frac{28}{3}\right). \end{aligned}$$

□

Nhận xét. *Để thực hiện được ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng tới kết quả: "Một đa thức $f(x)$ chia hết cho $x-a$ khi và chỉ khi $f(a)=0$."*

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}2x+7y=9\\3x-y=2\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+2y=20\\3x-2y=12\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+7y=1\\3x+5y=-4\end{cases}$ d) $\begin{cases}3x+5y=9\\2x-4y=-5.\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

a) $\begin{cases}2x+7y=9\\3x-y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+2y=20\\3x-2y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\y=6.\end{cases}$

c) $\begin{cases}2x+7y=1\\3x+5y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=1.\end{cases}$

d) $\begin{cases}3x+5y=9\\2x-4y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

□

BÀI 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}\\x+y=10\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{y^2+2x-8}{y}=y-3\\x+y=10.\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

a) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}\\x+y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=6.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{y^2+2x-8}{y}=y-3\\x+y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2.\end{cases}$

□

BÀI 3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{y}=1\\\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=-1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{9}{y-2}=100\\\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{7}{y-2}=308.\end{cases}$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Điều kiện $x,\ y\neq 0$.

Đặt $\dfrac{1}{x}=u$ và $\dfrac{1}{y}=v$, hệ được chuyển về dạng

$$\begin{cases}5u+3v=1\\2u+v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5u+3v=1\\-6u-3v=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-u=4\\5u+3v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-4\\5\cdot(-4)+3v=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=-4\\v=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}=-4\\\dfrac{1}{y}=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{4}\\y=\dfrac{1}{7}.\end{cases}$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{7}\right)$.

❷ Điều kiện: $x \neq -3$ và $y \neq 2$.
Đặt $\dfrac{5}{x+3} = 2u$ và $\dfrac{9}{y-2} = 2v$, hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases}5u - 9v = 50\\3u + 7v = 154\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u = 29\\v = 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{5}{x+3} = 56\\\dfrac{9}{y-2} = 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -\dfrac{163}{56}\\y = \dfrac{49}{20}.\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $x = -\dfrac{163}{56}$ và $y = \dfrac{49}{20}$.

□

BÀI 4. Cho hàm số $y = ax + b$. Xác định các hệ số a, b của hàm số, biết rằng đô thị hàm số của nó đi qua hai điểm

a) $A(1;3)$ và $B(3;2)$;   b) $A(1;-1)$ và $B(3;3)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Với giải thiết:
— $A(1;3)$ thuộc đồ thị hàm số, suy ra $3 = a \cdot 1 + b \Leftrightarrow a + b = 3$. (1)
— $B(3;2)$ thuộc đồ thị hàm số, suy ra $2 = a \cdot 3 + b \Leftrightarrow 3a + b = 2$. (2)
Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases}a + b = 3\\3a + b = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a = -1\\a + b = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2} + b = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -\dfrac{1}{2}\\b = \dfrac{7}{2}.\end{cases}$
Vậy hàm số có dạng $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

❷ Với giải thiết:
— $A(1;-1)$ thuộc đồ thị hàm số, suy ra $-1 = a \cdot 1 + b \Leftrightarrow a + b = -1$. (3)
— $B(3;3)$ thuộc đồ thị hàm số, suy ra $3 = a \cdot 3 + b \Leftrightarrow 3a + b = 3$. (4)
Từ (3) và (4), ta có $\begin{cases}a + b = -1\\3a + b = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a = 4\\a + b = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 2\\2 + b = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 2\\b = -3.\end{cases}$
Vậy hàm số có dạng $y = 2x - 3$.

□

BÀI 5. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

a) $A(1;3)$ và $B(3;2)$;   b) $A(1;-1)$ và $B(3;3)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Giả sử đường thẳng có phương trình $ax + by + c = 0$.

❶ Với giả thiết:
— $A(1;3)$ thuộc đường thẳng, suy ra $a \cdot 1 + b \cdot 3 = c \Leftrightarrow a + 3b = c$. (1)
— $B(3;2)$ thuộc đường thẳng, suy ra $a \cdot 3 + b \cdot 2 = c \Leftrightarrow 3a + 2b = c$. (2)
Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình

$$\begin{cases}a + 3b = c\\3a + 2b = c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a + 9b = 3c\\3a + 2b = c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7b = 2c\\3a + 2b = c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = \dfrac{2c}{7}\\3a + 2 \cdot \dfrac{2c}{7} = c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = \dfrac{2c}{7}\\a = \dfrac{c}{7}.\end{cases}$$

Vậy đường thẳng có phương trình $\dfrac{c}{7}x + \dfrac{2c}{7}y = c \Leftrightarrow x + 2y = 7$.

❷ Với giả thiết:

— $A(1;-1)$ thuộc đường thẳng, suy ra $a\cdot 1+b\cdot(-1)=c\Leftrightarrow a-b=c$. (3)

— $B(3;3)$ thuộc đường thẳng, suy ra $a\cdot 3+b\cdot 3=c\Leftrightarrow 3a+3b=c$. (4)

Từ (3) và (4), ta có được hệ phương trình

$$\begin{cases}a-b=c\\3a+3b=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-3b=3c\\3a+3b=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a=4c\\3a+3b=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2c}{3}\\3\cdot\dfrac{2c}{3}+3b=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2c}{3}\\b=-\dfrac{c}{3}.\end{cases}$$

Vậy đường thẳng có phương trình $\dfrac{2c}{3}x-\dfrac{c}{3}y=c\Leftrightarrow 2x-y=3$.

□

BÀI 6. Cho phương trình $ax^2-x+b=0$. Xác định các hệ số a, b của phương trình, biết nó có hai nghiệm

a) $x_1=1$ và $x_2=3$;

b) $x_1=-3$ và $x_2=2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Với giả thiết:

— $x_1=1$ là nghiệm của phương trình, suy ra

$$1^2-a\cdot 1+b=0\Leftrightarrow a-b=1. \tag{1}$$

— $x_2=3$ là nghiệm của phương trình, suy ra

$$3^2-a\cdot 3+b=0\Leftrightarrow 3a-b=9. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình

$$\begin{cases}a-b=1\\3a-b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=8\\3a-b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\3\cdot 4-b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=3.\end{cases}$$

Vậy phương trình có dạng $x^2-4x+3=0$.

❷ $a=-1$ và $b=-6$.

□

BÀI 7. Cho đa thức $f(x)=x^3-ax^2+bx-a$. Xác định các hệ số a, b của đa thức, biết nó chia hết cho $x-1$ và $x-3$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Với giả thiết:

— $f(x)$ chia hết cho $x-1$, suy ra

$$f(1)=0\Leftrightarrow 1^3-a\cdot 1^2+b\cdot 1-a=0\Leftrightarrow 2a-b=1. \tag{1}$$

— $f(x)$ chia hết cho $x-3$, suy ra

$$f(3)=0\Leftrightarrow 3^3-a\cdot 3^2+b\cdot 3-a=0\Leftrightarrow 10a-3b=27. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 10a - 3b = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 3b = 3 \\ 10a - 3b = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 24 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ 2 \cdot 6 - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 11. \end{cases}$$

□

BÀI 8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 0 \\ mx + y = m + 1. \end{cases}$

❶ Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất;

❷ Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < 1$ và $y < 1$.

BÀI 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1. \end{cases}$

❶ Giải hệ phương trình với $m = -1$;

❷ Chứng tỏ rằng với mọi $m \neq \pm 1$ hệ luôn có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x - y = 1$;

❸ Tìm giá trị của m để nghiệm duy nhất $(x; y)$ của hệ thỏa mãn $x^2 - y^2 < 0$;

❹ Tìm m nguyên để hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

BÀI 5 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để giải bài toán bằng cách bằng cách lập hệ phương trình, ta thực hiện các bước sau:

1. Lập hệ phương trình.
   - Chọn các ẩn và xác định điều kiện thích hợp cho ẩn. Chú ý phải ghi rõ đơn vị của ẩn.
   - Biểu thị các đại lượng chưa biết khác theo ẩn.
   - Dựa vào các dữ kiện và điều kiện của bài toán để lập hệ phương trình.
2. Giải hệ phương trình.
3. Thử lại, nhận định kết quả và trả lời.

Các bài toán được đưa ra thường rơi vào một trong 5 dạng sau:

1. Bài toán chuyển động.
2. Bài toán về số và chữ số.
3. Bài toán vòi nước.
4. Bài toán về tỉ số và quan hệ giữa các số.
5. Bài toán về phần trăm - năng suất.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Bài toán chuyển động

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

LỜI GIẢI.

1. ***Lập hệ phương trình.***
   - Lựa chọn ẩn.
     Gọi x là thời gian dự định đi lúc đầu, điều kiện $x > 0$.
     Gọi y độ dài quãng đường AB, điều kiện $y > 0$.
   - Thiết lập hai phương trình
     Với giả thiết:
     + Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì đến chậm mất 2 giờ, ta được:
     $$\frac{y}{35} = x + 2 \Leftrightarrow 35x - y = -70. \quad (1)$$
     + Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì đến sớm hơn 1 giờ, ta được:
     $$\frac{y}{35} = x - 1 \Leftrightarrow 50x - y = 50. \quad (2)$$

— Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 35x - y = -70 \\ 50x - y = 50. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

❷ ***Giải hệ phương trình.***

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x = 120 \\ 50x - y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 350 \end{cases} \text{,thỏa mãn điều kiện.}$$

❸ ***Kết luận.*** Vậy quãng đường AB bằng 350km và thời gian dự định đi lúc đầu là 8 giờ.

□

⚠ ***Nhận xét:*** *Như vậy trong lời giải của ví dụ trên, ta thấy:*

❶ *Chúng ta lựa chọn hai ẩn x, y tương ứng cho hai giá trị cần tìm là độ dài quãng đường AB và thời gian dự kiến.*

❷ *Việc thiết lập các phương trình (1) và (2) dựa trên phép so sánh thời gian tới đích với thời gian dự kiến. Tuy nhiên, cũng có thể lập luận theo kiểu khác, cụ thể:*

— *Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì đến chậm mất 2 giờ, tức là số thời gian chạy bằng $x+2$, do đó: $35(x+2) = y$, (vận tốc × thời gian = quãng đường).*

— *Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì đến sớm hơn 1 giờ, tức là số thời gian chạy bằng $x-1$, do đó: $50(x-1) = y$, (vận tốc × thời gian = quãng đường).*

❸ *Lời giải được trình bày thành ba phần độc lập nhau, với mục đích minh họa để giúp các em học sinh hiểu được cách trình bày bài toán theo thuật toán đã được chỉ ra. Tuy nhiên, kể từ các ví dụ sau chúng ta không cần phân tách như vậy mà chỉ yêu cầu các em học sinh khi đọc phải biết mình đang ở bước nào.*

VÍ DỤ 2. Lúc 7 giờ một người đi xe máy khởi hành từ A với vận tốc 40km/h. Sau đó, lúc 8 giờ 30 phút, một người khác cũng đi xe máy từ A đuổi theo với vận tốc 60km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ?

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta thực hiện đổi đơn vị: 8 giờ 30 phút $= 8 + \dfrac{30}{60} = \dfrac{17}{2}$ (giờ).

Gọi x là thời gian hai người gặp nhau, điều kiện $x > \dfrac{17}{2}$.

Gọi y là độ dài quãng đường từ A tới điểm gặp nhau, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

— Người thứ nhất đi với vận tốc 40km/h và xuất phát lúc 7 giờ, ta được:

$$40(x-7) = y \Leftrightarrow 40x - y = 280. \quad (1)$$

— Người thứ hai đi với vận tốc 60km/h và xuất phát lúc 8 giờ 30 phút, ta được:

$$60\left(x - \frac{17}{2}\right) = y \Leftrightarrow 60x - y = 510. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 40x - y = 280 \\ 60x - y = 510 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11\frac{1}{2} = 11 \text{ giờ } 30 \text{ phút} \\ y = 180 \end{cases}$.

Vậy họ gặp nhau lúc 11 giờ 30 phút. □

Nhận xét: *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:*

1. *Cho dù bài toán chỉ yêu cầu "Tìm thời điểm hai người gặp nhau "tương ứng với một ẩn xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:*
   — *Phương trình* (1) *được thiết lập dựa trên chuyển động của người thứ nhất.*
   — *Phương trình* (2) *được thiết lập dựa trên chuyển động của người thứ hai.*
2. *Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lựa chọn hướng lập phương trình.*
   Giả sử điểm họ gặp nhau là B. Gọi quãng đường AB là x, điều kiện $x > 0$.
   Suy ra:
   — *Thời gian người thứ nhất đi từ A đến B là* $\dfrac{x}{40}$.
   — *Thời gian người thứ hai đi từ A đến B là* $\dfrac{x}{60}$.
   Vì người thứ nhất đi sau người thứ hai 1 *giờ* 30 *phút nên ta có:*
   $$\frac{x}{40} = \frac{x}{60} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x = 2x + 180 \Leftrightarrow x = 180.$$
   Vậy điểm gặp nhau của hai người cách A là 180*km.*
   Để đi được quãng đường này:
   — *Người thứ nhất phải đi mất* $\dfrac{180}{40} = 4\dfrac{1}{2}$ *(giờ).*
   — *Người thứ hai phải đi mất* $\dfrac{180}{60} = 3$ *(giờ).*
   Vậy họ gặp nhau lúc 11 *giờ* 30 *phút.*

VÍ DỤ 3. Hai người ở hai địa điểm A và B cách nhau 3.6km, khởi hành cùng một lúc, đi ngược chiều và gặp nhau ở một địa điểm cách A là 2km. Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc như trong trường hợp trên, nhưng người đi chậm xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Tính vận tốc của mỗi người.

LỜI GIẢI.

Đổi 6 phút $= \dfrac{1}{10}$ giờ.

Gọi x là vận tốc của người đi nhanh hơn ($x > 0$, đơn vị km/h).

Gọi y là vận tốc của người đi chậm hơn ($y > 0$, đơn vị km/h).

Hai người khởi hành cùng một lúc, đi ngược chiều nhau và gặp nhau ở một địa điểm cách A là 2km (nghĩa là cách B là 1.6km). Lúc đó

— Người đi nhanh mất $\dfrac{2}{x}$ (h).

— Người đi chậm mất $\dfrac{1.6}{y}$ (h).

Do đó, ta có phương trình $\dfrac{2}{x} = \dfrac{1.6}{y}$. (1)

Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc như trong trường hợp trên, nhưng người đi chậm xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau chính giữa quãng đường. Lúc đó:

— Người đi nhanh mất $\dfrac{1.8}{x}$ (h).

— Người đi chậm mất $\dfrac{1.8}{y} + \dfrac{1}{10}$ (h).

Do đó, ta có phương trình $\dfrac{1.8}{x} = \dfrac{1.8}{y} + \dfrac{1}{10}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{2}{x} = \dfrac{1.6}{y} \\ \dfrac{1.8}{x} = \dfrac{1.8}{y} + \dfrac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2.5 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy vận tốc của người đi nhanh là 2.5km/h và vận tốc của người đi chậm là 2km/h. □

VÍ DỤ 4. Hai cano cùng khởi hành từ bến A và B cách nhau 85km, đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc riêng của mỗi cano. Biết rằng cano đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của cano đi ngược 9km/h và vận tốc nước là 3km/h.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta thực hiện đổi đơn vị: 1 giờ 40 phút $= 1 + \dfrac{40}{60} = \dfrac{5}{3}$ giờ.

Gọi x là vận tốc riêng của cano đi xuôi dòng, điều kiện $x > 0$. Do đó, khi đi xuôi dòng nó đi với vận tốc $(x+3)$km/h.

Gọi y là vận tốc riêng của cano đi ngược dòng, điều kiện $y > 3$. Do đó, khi đi ngược dòng nó đi với vận tốc $(y-3)$km/h.

Với giả thiết:

— Vận tốc riêng của cano đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của cano đi ngược 9km/h, ta được: $x - y = 9$. (1)

— Sau 1 giờ 40 phút hai cano gặp nhau, ta được:

$$\frac{5}{3}\left[(x+3)+(y-3)\right] = 85 \Leftrightarrow x + y = 51. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 21 \end{cases}$.

Vậy vận tốc riêng của cano đi xuôi bằng 30km/h, vận tốc riêng của cano đi ngược bằng 21km/h. □

⚠ ***Chú ý:*** *Nếu thay giả thiết "Vận tốc riêng của cano đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của cano đi ngược 9km/h "bằng "Vận tốc cano đi xuôi lớn hơn vận tốc cano đi ngược 9km/h "thì phương trình được minh họa bằng*

$$(x+3) - (y-3) = 9 \Leftrightarrow x - y = 15.$$

Khi đó, hệ phương trình có dạng $\begin{cases} x - y = 15 \\ x + y = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33 \\ y = 18 \end{cases}$.

Vậy vận tốc riêng của cano đi xuôi bằng 33km/h, vận tốc riêng của cano đi ngược bằng 18km/h.

VÍ DỤ 5. Hai vật chuyển động đều trên một đường tròn đường kính 20cm, xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi vật.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x và y là vận tốc của các vật (x, $y > 0$, đơn vị cm/s).

— Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau.
Do đó, ta có $\dfrac{20\pi}{x-y} = 20$.

— Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau.
Do đó, ta có $\dfrac{20\pi}{x+y} = 4$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{20\pi}{x-y} = 20 \\ \dfrac{20\pi}{x+y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\pi = 20x - 20y \\ 20\pi = 4x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\pi \\ y = 2\pi \end{cases}$.

Vậy vận tốc vật thứ nhất là 3πcm/s và vận tốc vật thứ hai là 2πcm/s. □

VÍ DỤ 6. Tìm số có hai chữ số, biết rằng tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục bằng 10. Ngoài ra, nếu đổi chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì sẽ được số mới nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với x,$y \in \mathbb{N}$, $1 \leq x$, $y \leq 9$.

Với giả thiết:

— Tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục bằng 10, ta được:

$$2x + y = 10. \quad (1)$$

— Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì sẽ được số mới ($\overline{xy} = 10y + x$) nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị, ta được:

$$\overline{xy} - \overline{yx} = 18 \Leftrightarrow (10x + y) - (10y + x) = 18 \Leftrightarrow x - y = 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy, số cần tìm là 42. □

⚠ ***Nhận xét:*** *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy*

❶ *Cho dù bài toán chỉ yêu cầu chúng ta đi tìm một số có hai chữ số (điều này có thể khiến học sinh hiểu nhầm rằng chỉ có một ẩn) nhưng cần hiểu rằng, số cần tìm được xây dựng từ hai thành phần. Do đó, chúng ta lựa chọn hai ẩn x, y tương ứng cho chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị. Và vì chúng là các chữ số đại diện nên phải thuộc tập $0, 1, 2, \ldots, 9$ xong ở đây không thể là chữ số 0 bởi các số $\overline{0x}$, $\overline{0y}$ không phải là số có hai chữ số.*

❷ *Việc thiết lập phương trình (1) là đơn giản, còn đối với phương trình (2) chúng ta cần tới kiến thức về biểu diễn số, cụ thể:*

$$\overline{xy} = 10x + y$$

$$\overline{xyz} = 100x + 10y + z, \ldots$$

VÍ DỤ 7. Tìm một số có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 6 đơn vị. Nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số tự nhiên đó tăng 720 đơn vị.

LỜI GIẢI.

Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với x, $y \in \mathbb{N}$, $1 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$.

Với giả thiết

— Chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 6 đơn vị, ta được:

$$x - y = 6. \quad (1)$$

— Khi viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng đơn vị (được số $\overline{x0y} = 100x + y$) thì số tự nhiên đó tăng 720 đơn vị, ta được:

$$(100x + y) - (10x + y) = 720 \Leftrightarrow x = 8. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 6 \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy số cần tìm là 82. □

DẠNG 2. Bài toán vòi nước

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 8. Một máy bơm muốn bơm nước đầy bể trong một thời gian quy định thì mỗi giờ phải bơm 10m^3. Sau khi bơm được $\dfrac{1}{3}$ bể, người công nhân vận hành máy cho hoạt động với công suất $15\text{m}^3/\text{h}$. Do vậy, so với quy định bể được bơm đầy trước 48 phút. Tính thể tích của bể.

LỜI GIẢI.

Ta thực hiện đổi đơn vị 48 phút $= \dfrac{48}{60} = \dfrac{12}{15}$ giờ.

Gọi x (giờ) là thời gian quy định để bơm đầy bể, điều kiện $x > 0$.

Gọi y (m^3) là thể tích của bể, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

— Muốn bơm đầy nước vào bể trong thời gian x mỗi giờ phải bơm 10m^3, ta được:

$$10x = y. \quad (1)$$

— Sau khi bơm được $\dfrac{1}{3}$ bể (tức bơm được $\dfrac{y}{3}\text{m}^3$ và tốn $\dfrac{y}{3 \cdot 10}$ giờ và còn lại $\dfrac{2y}{3}\text{m}^3$), người công nhân vận hành máy cho hoạt động với công suất $15\text{m}^3/\text{h}$ (tức là tốn $\dfrac{2y}{3 \cdot 15}$ giờ). Do vậy, so với quy định bể được bơm đầy trước 48 phút (tức là mất $x - \dfrac{12}{15}$), ta được:

$$\frac{y}{3 \cdot 10} + \frac{2y}{3 \cdot 15} = x - \frac{12}{15} \Leftrightarrow 90x - 7y = 72. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10x = y \\ 90x - 7y = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3.6 \\ y = 36 \end{cases}, \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy thể tích của bể bằng 36m^3. □

Nhận xét: *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:*

❶ *Cho dù bài toán chỉ yêu cầu tính "Tính thể tích của bể", tương ứng với một ẩn, xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:*

— *Phương trình* (1) *được thiết lập dựa trên quy định chung.*

— *Phương trình* (2) *được thiết lập dựa trên việc thực hiện bơm trong thực tế.*

❷ *Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lựa chọn hướng lập phương trình:*
Gọi thể tích của bể là x (m^3), *điều kiện* $x > 0$. *Suy ra*

— *Thời gian dự định để bơm đầy bể là* $\dfrac{x}{10}$.

— *Với* $\dfrac{1}{3}$ *bể (bằng* $\dfrac{x}{3}$*) bơm theo quy định mỗi giờ phải bơm* $10m^3$ *nên mất* $\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{x}{30}$ *(giờ.)*

— *Với* $\dfrac{2}{3}$ *bể còn lại (bằng* $\dfrac{2x}{3}$*), công suất của máy là* $15m^3/h$ *nên mất* $\dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{1}{15}=\dfrac{2x}{45}$ *(giờ).*

Vậy thời gian thực tế để bơm đầy bể là $\dfrac{x}{30}+\dfrac{2x}{45}$.
Vì so với quy định bể được bơm đầy trước 48 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{10}-\left(\frac{x}{30}+\frac{2x}{45}\right)=\frac{12}{15}\Leftrightarrow 2x=72\Leftrightarrow x=36,\ \textit{thỏa mãn.}$$

Vậy thể tích của bể nước là $36m^3$.

VÍ DỤ 9. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đàu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu sẽ đầy bể.

LỜI GIẢI.

Gọi x và y là thời gian để vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy một mình thì đầy bể ($x > 0$, $y > 0$, đơn vị giờ).

Do đó:

— Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\dfrac{1}{x}$ phần của bể.

— Trong 1 giờ vòi thứ hai chảy được $\dfrac{1}{y}$ phần của bể.

— Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ phần của bể.

Hai vòi cùng chảy thì trong $4\frac{4}{5}=\dfrac{24}{5}$ giờ sẽ đầy bể, nên mỗi giờ hai vòi chảy được $1:\dfrac{24}{5}=\dfrac{5}{24}$ (bể). Do đó, ta có phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{24}$. (1)

Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\dfrac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Do đó, ta có phương trình $\dfrac{9}{x}+\dfrac{5}{24}\cdot\dfrac{6}{5}=1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{24}\\ \dfrac{9}{x}+\dfrac{5}{24}\cdot\dfrac{6}{5}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{24}\\ \dfrac{9}{x}+\dfrac{1}{4}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{24}\\ 36+x=4x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=8\\ x=12.\end{cases}$$

Vậy nếu vòi thứ hai chảy một mình thì sau 8 giờ sẽ đầy bể. □

VÍ DỤ 10. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu mới đầy bể?

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Thiết lập ẩn thông qua giá trị cần tìm.

Gọi x là thời gian để vòi I chảy một mình cho đầy bể, điều kiện $x > 0$. Suy ra, mỗi giờ vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể.

Gọi y là thời gian để vòi II chảy một mình cho đầy bể, điều kiện $y > 0$. Suy ra, mỗi giờ vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Ta thực hiện đổi đơn vị:

$$1 \text{ giờ } 20 \text{ phút} = 1 + \frac{20}{60} = \frac{4}{3} \text{ giờ}; \quad 10 \text{ phút} = \frac{1}{6} \text{ giờ}; \quad 12 \text{ phút} = \frac{1}{5} \text{ giờ}.$$

Với giả thiết:

— Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy, ta được $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{3}{4}$. (1)

— Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$, ta được $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{y} = \frac{2}{15} \Leftrightarrow \frac{1}{6x}+\frac{1}{5y} = \frac{2}{15}$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x}+\frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{6x}+\frac{5}{5y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x}+\frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{6x} \\ v = \frac{1}{5y} \end{cases}$. Khi đó, hệ có dạng

$$\begin{cases} 6u+5v = \frac{3}{4} \\ u+v = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6x} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{5y} = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy vòi I chảy trong 2 giờ sẽ đầy bể, vòi II chảy trong 4 giờ sẽ đầy bể.

Cách 2: Thiết lập ẩn thông qua giá trị trung gian.

Giả sử mỗi giờ vòi I chảy được x phần bể, điều kiện $x > 0$.

Giả sử mỗi giờ vòi II chảy được y phần bể, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

— Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy, ta được $\frac{4}{3}(x+y) = 1 \Leftrightarrow 4x+4y = 3$. (3)

— Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể, ta được $\frac{1}{6} \cdot x + \frac{1}{5} \cdot y = \frac{2}{15} \Leftrightarrow 5x + 6y = 4. \quad (4)$

Từ (3) và (4), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4x + 4y = 3 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy vòi I chảy trong 2 giờ sẽ đầy bể, vòi II chảy trong 4 giờ sẽ đầy bể. □

⚠ ***Nhận xét:*** *Như vậy, thông qua hai cách giải của ví dụ trên ta thấy:*

❶ *Với cách 1, việc lựa chọn ẩn thông qua các giá trị cần tìm giúp cho cách đặt vấn đề khá tường minh. Tuy nhiên, chúng ta lại phải đối mặt với một hệ phức tạp (ở đó cần sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để giải).*

❷ *Với cách 2, việc lựa chọn ẩn thông qua giá trị trung gian cần có được những kiến thức đánh giá đúng đắn, xong sẽ giúp chúng ta thu được 1 hệ đơn giản.*

BÀI 6 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Giải phương trình tích

Phương pháp giải: *Phương pháp giải:* Biến đổi phương trình về dạng $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0. \end{array}\right.$

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình sau

1. (Bài 26.a/tr 56 - Sgk) $(3x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 0$.
2. (Bài 39.a/tr 57 - Sgk) $(3x^2 - 7x - 10)\left[2x^2 + \left(1 - \sqrt{5}\right)x + \sqrt{5} - 3\right] = 0$.

LỜI GIẢI.

1. Ta có

$$\left(3x^2 - 5x + 1\right)\left(x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x^2 - 5x + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 4 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

— Giải (1) ta được $3x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2 + \sqrt{13}}{6} \\ x = \dfrac{2 - \sqrt{13}}{6}. \end{array}\right.$

— Giải (2) ta được $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

2. Ta có

$$\begin{aligned} & \left(3x^2 - 7x - 10\right)\left[2x^2 + \left(1 - \sqrt{5}\right)x + \sqrt{5} - 3\right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 7x - 10 = 0 \\ 2x^2 + \left(1 - \sqrt{5}\right)x + \sqrt{5} - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \vee x = \dfrac{10}{3} \\ x = \dfrac{\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{30 - 10\sqrt{5}}}{4}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Giải các phương trình sau

1. (Bài 36.b/tr 56 - Sgk) $\left(2x^2 + x - 4\right)^2 - (2x - 1)^2 = 0$.
2. (Bài 39.d/tr 57 - Sgk) $\left(x^2 + 2x - 5\right)^2 = \left(x^2 - x + 5\right)^2$.

LỜI GIẢI.

❶ Ta có

$$\begin{aligned}&\left(2x^2+x-4\right)^2-(2x-1)^2=0\\ \Leftrightarrow&\left[\left(2x^2+x-4\right)-(2x-1)\right]\left[\left(2x^2+x-4\right)+(2x-1)\right]=0\\ \Leftrightarrow&\left(2x^2-x-3\right)\left(2x^2+3x-5\right)=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{aligned}&2x^2-x-3=0\\&2x^2+3x-5=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-1\vee x=-\frac{5}{2}\\&x=1\vee x=\frac{3}{2}.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

❷ Ta có

$$\left(x^2+2x-5\right)^2=\left(x^2-x+5\right)^2\Leftrightarrow\left(x^2+2x-5\right)^2-\left(x^2-x+5\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow(3x-10)\left(2x^2+x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&3x-10=0\\&2x^2+x=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=\frac{10}{3}\\&x=0\vee x=-\frac{1}{2}.\end{aligned}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm.

□

VÍ DỤ 3 (Bài 39.c/tr 57 - Sgk). Giải phương trình $(x^2-1)(0{,}6x+1)=0{,}6x^2+x$.

✍ LỜI GIẢI.

Biến đổi phương trình về dạng

$$\left(x^2-1\right)(0{,}6x+1)=x(0,6x+1)\Leftrightarrow(0{,}6x+1)\left(x^2-x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&0{,}6x+1=0\\&x^2-x-1=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-\frac{5}{3}\\&x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vee\frac{1-\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm. □

🗀 DẠNG 2. Sử dụng ẩn phụ chuyển phương trình về phương trình bậc hai

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 4 (Bài 37.d/tr 56 - Sgk). Giải phương trình $2x^2+1=\dfrac{1}{x^2}-4$.

✍ LỜI GIẢI.

Đặt $x^2=t\geq 0$, ta được

$$2t+1=\frac{1}{t}-4\Leftrightarrow 2t^2+5t-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&t=\frac{-5+\sqrt{33}}{4}\\&t=\frac{-5-\sqrt{33}}{4}\text{ (loại)}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow x^2=\frac{-5+\sqrt{33}}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-\frac{\sqrt{-5+\sqrt{33}}}{2}\\&x=\frac{\sqrt{-5+\sqrt{33}}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm. □

VÍ DỤ 5 (Bài 59/tr 63 - Sgk). Giải các phương trình sau

a) $2\left(x^2-2x\right)^2+3\left(x^2-2x\right)+1=0$;

b) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+3=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $x^2-2x=t$. Ta được $2t^2+3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

— Với $t=-1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$.

— Với $t=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm.

❷ Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$. Ta được $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3. \end{array}\right.$

— Với $t=1 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0$ (vô nghiệm).

— Với $t=3 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm.

□

VÍ DỤ 6 (Bài 40/tr 57 - Sgk). Giải các phương trình sau

a) $3\left(x^2+x\right)^2-2\left(x^2+x\right)-1=0$;

b) $\left(x^2-4x+2\right)^2+x^2-4x-4=0$;

c) $x-\sqrt{x}=5\sqrt{x}+7$;

d) $\dfrac{x}{x+1}-10\cdot\dfrac{x+1}{x}=3$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $x^2+x=t$, ta được $3t^2-2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=1 \\ x^2+x=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-1=0 \\ 3x^2+3x+1=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có hai nghiệm.

❷ Đặt $x^2-4x+2=t$, ta được $t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+2=2 \\ x^2-4x+2=-3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x=0 \\ x^2-4x+5=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có hai nghiệm.

❸ Đặt $\sqrt{x}=t\geq 0$, ta được $t^2-6t-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ (loại)} \\ t=7 \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{x}=7 \Leftrightarrow x=49$.

Vậy phương trình có một nghiệm.

❹ Điều kiện $x\neq 0, x\neq -1$.

Đặt $\dfrac{x}{x+1} = t \neq 0$, ta được $t - 10 \cdot \dfrac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{x+1} = 5 \\ \dfrac{x}{x+1} = -2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5(x+1) \\ x = -2(x+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{4}$ hoặc $x = -\dfrac{2}{3}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm.

□

DẠNG 3. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Phương pháp giải: *Phương pháp giải:* Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Khử mẫu, đưa phương trình về dạng thông thường.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện cho các nghiệm tìm được rồi kết luận.

VÍ DỤ 7 (Bài 57.c, 57.d/tr 63 - Sgk). Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{x}{x-2} = \dfrac{10-2x}{x^2-2x}$;

b) $\dfrac{x+0{,}5}{3x+1} = \dfrac{7x+2}{9x^2-1}$.

LỜI GIẢI.

1. Điều kiện $x \neq 0, x \neq -2$.

   Ta có
   $$\frac{x}{x-2} = \frac{10-2x}{x^2-2x} \Leftrightarrow x^2 = 10 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{11} \\ x = -1 + \sqrt{11} \end{array}\right..$$

   Vậy phương trình có hai nghiệm.

2. Điều kiện $x \neq \pm\dfrac{1}{3}$.

   Ta có $\dfrac{x+0{,}5}{3x+1} = \dfrac{7x+2}{9x^2-1} \Leftrightarrow (x+0{,}5)(3x-1) = 7x+2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6{,}5x - 2{,}5 = 0$

   $\Leftrightarrow 6x^2 - 13x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{5}{2} \end{array}\right..$

   Vậy phương trình có hai nghiệm.

□

VÍ DỤ 8 (Bài 35.b, 35.c/tr 56 - Sgk). Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{x+2}{x-5} + 3 = \dfrac{6}{2-x}$.

b) $\dfrac{4}{x+1} = \dfrac{-x^2-x+2}{(x+1)(x+2)}$.

LỜI GIẢI.

1. Tập xác định: $x \neq 5, x \neq 2$.

   Ta có $\dfrac{x+2}{x-5} + 3 = \dfrac{6}{2-x} \Leftrightarrow (x+2)(2-x) + 3(x-5)(2-x) = 6(x-3)$

   $\Leftrightarrow 4x^2 - 15x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right..$

Vậy phương trình có hai nghiệm.

❷ Tập xác định: $x \neq 1, x \neq 2$. Biến đổi phương trình về dạng

$$4(x+2) = -x^2 - x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \text{ (loại)} \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có một nghiệm.

□

⚠ *Trong một vài trường hợp, việc quy đồng mẫu số không phải là giải pháp tối ưu, đặc biệt khi quy đồng chúng ta nhận được một phương trình bậc cao hơn 2, trong những trường hợp như vậy chúng ta thường nghĩ tới những phương pháp giảm bậc cho phương trình và một trong số đó là phương pháp đặt ẩn phụ. Ví dụ sau sẽ minh họa nhận định này*

VÍ DỤ 9. Giải phương trình $\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+2} - \dfrac{x^2+2}{x^2+3x+2} = \dfrac{5}{2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 2x + 2 \neq 0 \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$. (*)

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả tử và mẫu của VT của phương trình cho $x \neq 0$, ta được

$$\frac{x + \dfrac{2}{x}}{x - 2 + \dfrac{2}{x}} - \frac{x + \dfrac{2}{x}}{x + 3 + \dfrac{2}{x}} = \frac{5}{2}.$$

Đặt $t = x + \dfrac{2}{x}$, khi đó phương trình được chuyển về dạng

$$\begin{aligned} & \frac{t}{t-2} - \frac{t}{t+3} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{t(t+3) - t(t-2)}{(t-2)(t+3)} = \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{5t}{(t-2)(t+3)} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t = (t-2)(t+3) \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{2}{x} = 3 \\ x + \dfrac{2}{x} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$. □

Nhận xét.

1) Như vậy, với bài toán trên nếu chúng ta lựa chọn hướng quy đồng mẫu số thì sẽ nhận được một phương trình bậc 4 và việc giải phương trình này phụ thuộc rất nhiều vào kỹ năng đoán nghiệm cùng phép chia đa thức để chuyển phương trình về dạng tích. Tuy nhiên, một câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra ở đây là "Tại sao lại có thể nghĩ ra được cách chia cho x rồi đặt ẩn phụ như vậy?", câu trả lời có thể được khẳng định ở dạng phương trình tổng quát

$$\frac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \frac{ax^2 + px + c}{ax^2 + qx + c} = 0.$$

Ta có thể lựa chọn phép chia cả tử và mẫu cho x (hoặc x^2) rồi đặt ẩn phụ $t = ax + \dfrac{c}{x}$ $\Big($hoặc $t = a + \dfrac{c}{x^2}\Big)$.

Ý tưởng trên được mở rộng cho phương trình dạng

$$\frac{mx}{ax^2+bx+d} + \frac{nx}{ax^2+cx+d} = p.$$

2) *Việc lựa chọn ẩn phụ trong hầu hết các trường hợp luôn cần tới những biến đổi đại số để làm xuất hiện dạng của ẩn phụ và để thực hiện tốt công việc này các em học sinh luôn phải thật linh hoạt và sáng tạo. Ví dụ sau sẽ minh họa nhận định này.*

VÍ DỤ 10. Giải phương trình $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$.

LỜI GIẢI.

Điều kiện $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Viết lại phương trình dưới dạng

$$x^2 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 = 5 - 2x\cdot\frac{2x}{x+2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + 4\cdot\frac{x^2}{x+2} - 5 = 0.$$

Đặt $t = \dfrac{x^2}{x+2}$, khi đó phương trình được chuyển về dạng

$$t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -5.$$

— Với $t = 1$, ta được $\dfrac{x^2}{x+2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = x+2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

— Với $t = -5$, ta được $\dfrac{x^2}{x+2} = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5x - 10 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$. □

DẠNG 4. Giải phương trình bậc ba

Phương pháp giải: *Phương pháp giải:* Để giải phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1)

ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đoán nghiệm x_0 của (1).

Bước 2: Phân tích (1) thành

$$(x - x_0)(ax^2 + b_1x + c_1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b_1x + c_1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

Bước 3: Giải (2) rồi kết luận nghiệm của phương trình.

1) *Dự đoán nghiệm dựa vào kết quả sau:*

   a) *Nếu $a+b+c+d = 0$ thì (1) có nghiệm $x = 1$.*

   b) *Nếu $a-b+c-d = 0$ thì (1) có nghiệm $x = -1$.*

c) Nếu a, b, c, d nguyên và (1) có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của d và a.

d) Nếu $ac^3 = bd^3$ $(a, d \neq 0)$ thì (1) có nghiệm $x = -\frac{c}{b}$.

2) Với các phương trình có chứa tham số có thể coi tham số là ẩn để thực hiện việc phân tích đa thức.

VÍ DỤ 11. Giải các phương trình sau

a) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$; b) $2x^3 + x + 3 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Nhận xét rằng $a + b + c + d = 0$, do đó phương trình có nghiệm $x = 1$.
Biến đổi phương trình về dạng

$$(x-1)(2x^2+3x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt: $x = 1, x = \frac{1}{2}, x = -2$.

❷ Nhận xét rằng $a - b + c - d = 0$ do đó phương trình có nghiệm $x = -1$.
Biến đổi phương trình về dạng

$$(x+1)(2x^2-2x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 2x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

□

VÍ DỤ 12 (Bài 57/tr63-sgk). Giải các phương trình sau

a) $1{,}2x^3 - x^2 - 0,2x = 0$; b) $5x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$1{,}2x^3 - x^2 - 0{,}2x = 0 \Leftrightarrow x(1{,}2x^2 - x - 0{,}2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 1{,}2x^2 - x - 0{,}2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \vee x = -\dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm.

❷ Ta có

$$5x^3 - 5x - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x(x^2-1) - (x^2-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-1)(5x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \\ 5x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm.

□

VÍ DỤ 13. Giải các phương trình sau

a) $3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0$;

b) $x^3 + x^2 - x\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$.

LỜI GIẢI.

❶ Nhận xét rằng $a = 3$ có ước là $\pm 1, \pm 3$ và $d = 2$ có ước là $\pm 1, \pm 2$ do đó phương trình nếu có nghiệm hữu tỉ thì chỉ có thể là một trong các giá trị $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$.
Nhận thấy $x = \frac{2}{3}$ là nghiệm của phương trình. Biến đổi phương trình về dạng

$$(3x-2)(x^2-2x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ x = 1 \pm \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt: $x = \frac{2}{3}, x = 1 + \sqrt{3}, x = 1 - \sqrt{3}$.

❷ Nhận xét rằng $ac^3 = 1 \cdot (-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2} = bd^3$ do đó phương trình có nghiệm $x = -\frac{c}{b} = \sqrt{2}$.
Biến đổi phương trình về dạng

$$(x - \sqrt{2})\left[x^2 + (\sqrt{2}+1)x + 2\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \sqrt{2} = 0 \\ x^2 + (\sqrt{2}+1)x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}$.

□

⚠ *Khi đã thành thạo các phương pháp nhẩm nghiệm các bạn học sinh không cần nêu nhận xét trong lời giải cho mỗi phương trình.*

VÍ DỤ 14 (Bài 39.b/tr 57-sgk). Giải phương trình $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$.

LỜI GIẢI.

Ta có $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có 3 nghiệm. □

VÍ DỤ 15. Cho phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 3(m+4)x - m - 12 = 0$.

❶ Giải phương trình với $m = -12$.

❷ Xác định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

LỜI GIẢI.

Biến đổi phương trình về dạng

$$(x-1)(x^2 - 2mx + m + 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ g(x) = x^2 - 2mx + m + 12 = 0 \ (2) \end{array}\right. \quad (I)$$

❶ Với $m=-12$, hệ (I) có dạng $\left[\begin{aligned}&x-1=0\\&x^2+24x=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=1\\&x=0\\&x=24.\end{aligned}\right.$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x=1$, $x=0$, $x=-24$.

❷ Phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\Delta'_g>0\\ g(1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-m-12>0\\ 13-m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<-3\\ 4<m\neq 13.\end{cases}$

Vậy, với $m<-3$ hoặc $4<m\neq 13$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

□

⚠ *Nếu phương trình có chứa tham số m, ta có thể coi $m$là ẩn, còn x là tham số. Sau đó tìm lại x theo m.*

VÍ DỤ 16. Xác định m để phương trình $m^2x^3-3mx^2+(m^2+2)x-m=0$, với $m\neq 0$ có ba nghiệm phân biệt.

✍ **LỜI GIẢI.**

Viết lại phương trình về dạng $(x^3+x)m^2-(3x^2+1)m+2x=0$.

Coi m là ẩn, còn x là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m.

Giải ra ta được $m=\dfrac{1}{x}$ hoặc $m=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Do đó phương trình được chuyển về dạng

$$(mx-1)(mx^2-2x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&mx-1=0\\&f(x)=mx^2-2x+m=0.\end{aligned}\right.$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\dfrac{1}{m}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\\ f(\dfrac{-1}{m})\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ 1-m^2>0\\ m-\dfrac{1}{m}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 0\\ |m|<1.\end{cases}$

Vậy, với $m\in(-1,1)\setminus\{0\}$ phương trình có ba nghiệm phân biệt. □

⚠ *Nếu các phương pháp nhẩm nghiệm không có tác dụng, ta có thể thử vận dụng kiến thức về phân tích đa thức.*

VÍ DỤ 17. Giải phương trình $x^3-3x^2\sqrt{3}+7x-\sqrt{3}=0$. (1)

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow x^3-x^2\sqrt{3}-2x^2\sqrt{3}+6x+x-\sqrt{3}=0\\&\Leftrightarrow x^2(x-\sqrt{3})-2x\sqrt{3}(x-\sqrt{3})+(x-\sqrt{3})=0\\&\Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x^2-2x\sqrt{3}+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x-\sqrt{3}=0\\&x^2-2x\sqrt{3}+1=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=\sqrt{3}\\&x=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$. □

DẠNG 5. Giải phương trình trùng phương

Phương pháp giải: *Phương pháp giải:* Với phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1) ta thực hiện các bước:

Bước 1: Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.

Bước 2: Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng

$$at^2 + bt + c = 0 \qquad (2)$$

Bước 3: Giải (2) để tìm nghiệm t, từ đó suy ra nghiệm x cho phương trình.

⚠ *Nếu phương trình (2) có nghiệm $t_0 \geq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$.*

VÍ DỤ 18 (Bài 56 trang 63 SGK). Giải các phương trình sau

a) $3x^4 - 12x^2 + 9 = 0$; b) $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$; c) $x^4 + 5x^2 + 1 = 0$.

LỜI GIẢI.

❶ Đặt $x^2 = t \geq 0$. Ta được $3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

❷ Đặt $x^2 = t \geq 0$. Ta được $2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

❸ Đặt $x^2 = t \geq 0$. Ta được $t^2 + 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-5 + \sqrt{21}}{2} < 0 \\ t = \dfrac{-5 - \sqrt{21}}{2} < 0. \end{array}\right.$

Vậy phương trình vô nghiệm.

⚠ *Ta cũng có thể đưa ra nhận xét để kết luận phương trình vô nghiệm như sau: Dễ thấy* $x^4 + 5x^2 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 5x^2 + 1 > 0$.

Vậy phương trình vô nghiệm.

□

VÍ DỤ 19. Cho phương trình $mx^4 - 2(m-1)x^2 + m - 1 = 0$. (1)

Tìm m để phương trình

❶ Có nghiệm duy nhất.

❷ Có hai nghiệm phân biệt.

❸ Có ba nghiệm phân biệt.

❹ Có bốn nghiệm phân biệt.

LỜI GIẢI.

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$. Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng

$$f(t) = mt^2 - 2(m-1)t + m - 1 = 0. \qquad (2)$$

Ta xét hai trường hợp:

TH1: Với $m = 0$, ta được

$$(2) \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy với $m = 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

TH2: Với $m \neq 0$ thì

❶ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t_1 \leq 0 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} S \leq 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2(m-1)}{m} \leq 0 \\ \dfrac{m-1}{m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

❷ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m(m-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Vậy với $0 \leq m < 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

❸ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 2 \text{ có nghiệm } 0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \dfrac{m-1}{m} = 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0. \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm, vậy không tồn tại m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

❹ Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } 0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \dfrac{m-1}{m} > 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy $m < 0$ để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

□

🗀 DẠNG 6. Giải phương trình hồi quy và phản hồi quy

Phương pháp giải:

— Phương trình hồi quy:

Để giải phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (1)$ ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$.
Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$at^2 + bt + c - 2a = 0. \quad (3)$$

— Phương trình phản hồi quy:
Để giải phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \quad (1)$ ta thực hiện theo các bước:
Bước 1: Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x - \dfrac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 + 2$.
Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$at^2 + bt + c + 2a = 0. \quad (3)$$

Chú ý: Phương pháp mở rộng tự nhiên cho dạng phương trình

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

có hệ số thoả mãn $\dfrac{e}{a} = \left(\dfrac{d}{b}\right)^2, e \neq 0$.
Khi đó ta đặt ẩn phụ $t = x + \dfrac{d}{b}.\dfrac{1}{x}$.
Trước hết ta quan tâm tới phương trình có dạng hồi quy.

VÍ DỤ 20. Giải phương trình $x^4 - \dfrac{1}{2}x^3 - x^2 - \dfrac{1}{2}x + 1 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**
Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, điều kiện $|t| \geq 2$, suy ra $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Khi đó phương trình có dạng: $t^2 - \dfrac{1}{2}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{3}{2} (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Với $t = 2$ ta có $x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$. □

VÍ DỤ 21. Giải phương trình $x^4 + 3x^3 - \dfrac{35}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Nhận xét rằng $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2\neq 0$, ta được

$$x^2+3x-\frac{54}{3}-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{35}{4}=0.$$

Đặt $t=x-\dfrac{1}{x}$, điều kiện $|t|\geq 2$, suy ra $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$.

Khi đó phương trình có dạng: $t^2+2+3t-\dfrac{35}{4}=0\Leftrightarrow 4t^2+12t-27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3}{2}\\ t=-\dfrac{9}{2}.\end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{3}{2}$ ta có $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Với $t=-\dfrac{9}{2}$ ta có $x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow 2x^2+9x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-9+\sqrt{97}}{4}\\ x=\dfrac{-9-\sqrt{97}}{4}.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x=2$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{-9+\sqrt{97}}{4}$, $x=\dfrac{-9-\sqrt{97}}{4}$. □

VÍ DỤ 22. Giải phương trình $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Nhận xét rằng $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2\neq 0$, ta được

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-21\left(x+\frac{5}{x}\right)+74=0.$$

Đặt $t=x+\dfrac{5}{x}$, suy ra $x^2+\dfrac{25}{x^2}=t^2-10$.

Khi đó phương trình có dạng: $2t^2-21t+54=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=6\\ t=\dfrac{9}{2}.\end{array}\right.$

Với $t=6$ ta có $x+\dfrac{5}{x}=6\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5.\end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{9}{2}$ ta có $x+\dfrac{5}{x}=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow 2x^2-9x+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{5}{2}.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x=1$, $x=5$, $x=2$, $x=\dfrac{5}{2}$. □

⚠ *Nhiều phương trình ở dạng ban đầu không phải là phương trình hồi quy hay phản hồi quy, tuy nhiên với phép đặt ẩn phụ thích hợp ta có thể chuyển chúng về dạng hồi quy hoặc phản hồi quy, từ đó áp dụng phương pháp đã biết để giải. Ta đi xem xét hai ví dụ sau.*

VÍ DỤ 23. Giải phương trình

$$(x-2)^4+(x-2)(5x^2-14x+13)+1=0. \tag{1}$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Nhận xét rằng đây không phải là một phương trình hồi quy, tuy nhiên nếu đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ có một phương trình hồi quy.

Thật vậy, đặt $y = x - 2$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{aligned} & y^4 + y\left[5(y+2)^2 - 14(y+2) + 13\right] + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y^4 + 5y^3 + 6y^2 + 5y + 1 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Nhận xét rằng $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $y^2 \neq 0$, ta được phương trình tương đương

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 5\left(y + \frac{1}{y}\right) + 6 = 0.$$

Đặt $t = y + \dfrac{1}{y}$, suy ra $y^2 + \dfrac{1}{y^2} = t^2 - 2$.

Khi đó phương trình có dạng: $t^2 + 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -4 \end{array}\right.$.

Với $t = -1$ ta có $y + \dfrac{1}{y} = -1 \Leftrightarrow y^2 - y + 1 = 0$, vô nghiệm.

Với $t = -4$ ta có $y + \dfrac{1}{y} = -4 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 - \sqrt{3} \\ y = -2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$ suy ra nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = -\sqrt{3}$ và $x = \sqrt{3}$.

□

VÍ DỤ 24. Giải phương trình

$$(x^2 - x)^2 - 2x(3x - 5) - 3 = 0.$$

✍ **LỜI GIẢI.**

Nhận xét rằng đây không phải là một phương trình hồi quy, tuy nhiên nếu đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ có một phương trình hồi quy.

Thật vậy, đặt $y = x - 1$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\begin{aligned} & \left[(y+1)^2 - (y+1)\right] - 2(y+1)\left[3(y+1) - 5\right] - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y^4 + 2y^3 - 5y^2 - 2y + 1 = 0 \end{aligned}$$

Nhận xét rằng $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $y^2 \neq 0$, ta được phương trình tương đương

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 2\left(y - \frac{1}{y}\right) - 5 = 0.$$

Đặt $t = y - \dfrac{1}{y}$, suy ra $y^2 + \dfrac{1}{y^2} = t^2 + 2$.

Khi đó phương trình có dạng: $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$.

Với $t = -1$ ta có $y - \dfrac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$, từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Với $t = -3$ ta có $y - \dfrac{1}{y} = -3 \Leftrightarrow y^2 + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ y = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$, từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $x = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$. □

DẠNG 7. Phương trình dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m \quad (1)$, với $a + b = c + d$

Phương pháp giải: *Phương pháp:* Để giải phương trình (1) ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết lại phương trình dạng:

$$\left[x^2 + (a+b)x + ab\right] \cdot \left[x^2 + (c+d)x + cd\right] = m. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x^2 + (a+b)x + ab$, suy ra $x^2 + (c+d)x + cd = t - ab + cd$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$t(t - ab + cd) = m \Leftrightarrow t^2 - (ab - cd)t - m = 0. \quad (3)$$

VÍ DỤ 25. Giải phương trình $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8) = 4$.

LỜI GIẢI.

Viết lại phương trình dạng $(x^2 + 12x + 32)(x^2 + 12x + 35) = 4$.

Đặt $t = x^2 + 12x + 32$, suy ra $x^2 + 12x + 35 = t + 3$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t(t+3) = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 1 \end{array}\right..$$

Với $t = -4$, ta được $x^2 + 12x + 32 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \pm 2\sqrt{2}$.

Với $t = 1$, ta được $x^2 + 12x + 32 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 31 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \pm \sqrt{5}$.

Vậy phương trình có bốn nghiệm phân biệt là $x = -6 \pm 2\sqrt{2}$ và $x = -6 \pm \sqrt{5}$. □

VÍ DỤ 26. Giải phương trình $(2x-1)(x-1)(x-3)(2x+3) = -9$.

LỜI GIẢI.

Viết lại phương trình dạng $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 3x - 9) = -9$.

Đặt $t = 2x^2 - 3x + 1$, suy ra $2x^2 - 3x - 9 = t - 10$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t(t-10)=-9 \Leftrightarrow t^2-10t+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=9 \end{array}\right. .$$

Với $t=1$, ta được $2x^2-3x+1=1 \Leftrightarrow 2x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. .$

Với $t=9$, ta được $2x^2-3x+1=9 \Leftrightarrow 2x^2-3x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{37}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{37}}{4} \end{array}\right. .$

Vậy phương trình có bốn nghiệm phân biệt là $x=0$, $x=\dfrac{3}{2}$, $x=\dfrac{3+\sqrt{37}}{4}$, $x=\dfrac{3-\sqrt{37}}{4}$. □

DẠNG 8. Phương trình dạng $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ (1)

Phương pháp giải: Phương pháp giải

Bước 1: Đặt $t=x+\dfrac{a+b}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+a=t+\dfrac{a-b}{2} \\ x+b=t-\dfrac{a-b}{2}. \end{cases}$

Khi đó, phương tình (1) có dạng:

$$2t^4+12(\frac{a-b}{2})^2t^2+2(\frac{a-b}{2})^4=c. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $u=t^2$, điều kiện $u \geq 0$.

Khi đó, phương trình có dạng

$$2u^2+12(\frac{a-b}{2})^2u+2(\frac{a-b}{2})^4=c. \quad (3)$$

Bước 3: Giải (3) nhận được u, từ đó suy ra nghiệm t rồi tới x.

VÍ DỤ 27. Giải phương trình $(x+4)^4+(x+6)^4=82$.

LỜI GIẢI.

Đặt $t=x+\dfrac{4+6}{2}=x+5 \Rightarrow \begin{cases} x+4=t-1 \\ x+6=t+1 \end{cases}.$

Khi đó, phương trình được chuyển về dạng:

$(t-1)^4+(t-1)^4=82 \Leftrightarrow t^4+6t^2-40=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-10 \end{array}\right. .$

— $t=4$, ta được $x+5=4 \Leftrightarrow x=-1$.

— $t=-10$, ta được $x+5=-10 \Leftrightarrow x=-15$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=-1$ và $x=-15$. □

VÍ DỤ 28. Cho phương trình $(a+1)^4+(x+3)^4=2m$. (1)

1. Giải phương trình với $m=1$.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

✍ LỜI GIẢI.

Đặt $t = x + \dfrac{1+3}{2} = x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = t-1 \\ x+3 = t+1 \end{cases}$.

Khi đó phương trình (1) được chuyển về dạng

$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 2m$

$\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 2m$

$\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 + 1 - m = 0. \quad (2)$

Đặt $u = t^2$, điều kiện $u \geq 0$. Khi đó, phương trình (2) được chuyển về dạng

$f(u) = u^2 + 6u + 1 - m = 0. \quad (3)$

❶ Với $m = 1$, phương trình (3) trở thành

$$u^2 + 6u = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = -6 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

❷ Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là

(3) có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy, với $m > 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

□

🗀 DẠNG 9. Sử dụng phương trình bậc hai giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Phương pháp giải: Với các phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, có thể được chuyển về phương trình bậc hai bằng một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi tương đương, bao gồm

$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$

$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$ hoặc $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Trước tiên chúng ta quan tâm tới phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối được chuyển về phương trình bậc hai bằng phương pháp biến đổi tương đương.

VÍ DỤ 29. Giải phương trình: $|x^2 - 2x - 2| = |x^2 + 2x|$.

✍ LỜI GIẢI.

Phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 2 = x^2 + 2x \\ x^2 - 2x - 2 = -x^2 - 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \pm 1$.

□

Nhận xét. *Như vậy, ví dụ trên đã minh họa cho phép biến đổi tương đương thứ nhất của phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.*

VÍ DỤ 30. Giải phương trình: $|x^2+x| = -x^2+x+2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} -x^2+x+2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+x = -x^2+x+2 \\ x^2+x = x^2-x-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2 = 2 \\ 2x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm 1$. □

⚠ *Các ví dụ tiếp theo, sẽ minh họa việc sử dụng ẩn phụ để chuyển phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối về phương trình bậc hai.*

VÍ DỤ 31. Giải phương trình: $(x-1)^2 + 4|x-1| + 3 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $t = |x-1|$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2+4t+3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 3$$

$$\Leftrightarrow |x-1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = 3 \\ x-1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là $x = 4$ và $x = -2$. □

DẠNG 10. Sử dụng phương trình bậc hai giải phương trình chứa căn thức

Phương pháp giải: Phương pháp giải

Với các phương trình chứa căn thức, có thể chuyển về phương trình bậc hai bằng một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi tương đương, bao gồm:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \geq 0.$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Trước tiên chúng ta quan tâm tới phương trình chứa căn thức được chuyển về phương trình bậc hai bằng phương pháp biến đổi tương đương.

VÍ DỤ 32. Giải các phương trình:

❶ $\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{x+1}$ ❷ $\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{2x^2-7x+9}$.

LỜI GIẢI.

❶ Phương trình được biến đổi tương đương thành:

$$x^2-4x+5=x+1\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=4$.

❷ Phương trình được biến đổi tương đương thành:

$$x^2-2x+3=2x^2-7x+9\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+3\geq 0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+2\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=2$ và $x=3$.

□

Nhận xét. *Trong ví dụ trên:*
Ở câu a), chúng ta lựa chọn điều kiện $x+1\geq 0$, vì có cảm giác nó đơn giản hơn điều kiện $x^2-4x=5\geq 0$. Tuy nhiên, thực tế ta thấy điều kiện $x^2-4x+5\geq 0$ là đơn giản hơn vì $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq 0$, luôn đúng và trong trường hợp này chúng ta không cần kiểm tra lại nghiệm.
Ở câu b), chúng ta lựa chọn điều kiện $x^2-2x+3\geq 0$, vì điều này luôn đúng.

VÍ DỤ 33. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x-3}=x-1$.

LỜI GIẢI.

Phương trình được biến đổi tương đương thành:

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2x^2+x-3=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=1$. □

VÍ DỤ 34. Giải phương trình: $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$.

LỜI GIẢI.

Điều kiện: $\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \\ 1-2x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4\leq x\leq \dfrac{1}{2}$.

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-2x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1-2x)(1-x)}=2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (1-2x)(1-x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x(2x+7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$. □

⚠ *Các ví dụ tiếp theo, sẽ minh họa việc sử dụng ẩn phụ để chuyển phương trình chứa căn về phương trình bậc hai.*

VÍ DỤ 35. Giải phương trình: $2(x^2-2x) + \sqrt{x^2-2x-3} - 9 = 0$.

LỜI GIẢI.

Điều kiện: $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$. $\quad (*)$

Viết lại phương trình dưới dạng: $2(x^2-2x-3) + \sqrt{x^2-2x-3} - 3 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2-2x-3}$ điều kiện $t \geq 0$. $\quad (**)$

Khi đó, phương trình có dạng:

$2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$, thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

□

B BÀI TẬP

BÀI 1. Giải các phương trình sau.

a) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = 1$.

b) $\dfrac{9(x^2+x+1)}{x^2-x+1} - \dfrac{7(x+1)}{x-1} = 0$.

LỜI GIẢI.

1. Điều kiện $x \neq \pm 1$. Phương trình tương đương với
$x + 1 - (x-1) = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ (thỏa mãn).
2. Điều kiện $x \neq 1$. Phương trình tương đương với

$$9(x-1)(x^2+x+1) = 7(x+1)(x^2-x+1) \Leftrightarrow 9(x^3-1) = 7(x^3+1) \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}.$$

□

BÀI 2. Giải các phương trình sau.

a) $\dfrac{x^2-2x-1}{6} - \dfrac{1}{x^2-2x} = 0$.

b) $\dfrac{2}{x^2-3x+3} + \dfrac{1}{x^2-3x+4} = \dfrac{15}{2(x^2-3x+5)}$.

LỜI GIẢI.

1. Điều kiện $x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Đặt $t = x^2 - 2x$, phương trình biến đổi thành

$$\frac{t-1}{6} - \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

❷ Đặt $t = x^2 - 3x + 4$ với $t \neq 0; \pm 1$, phương trình trở thành

$$\frac{2}{t-1}+\frac{1}{t}=\frac{15}{2(t+1)} \Leftrightarrow 9t^2-19t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t=2\\ &t=\frac{1}{9}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x^2-3x+2=0\\ &x^2-3x+\frac{35}{9}=0\,(\text{vô nghiệm})\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=1\\ &x=2.\end{aligned}\right.$$

□

BÀI 3. Giải các phương trình sau.

a) $\dfrac{2x^2+5x+8}{2x^2+3x+8}+\dfrac{2x^2+3x+8}{2x^2+7x+8}=0.$ b) $\dfrac{5x^2+6x+9}{5x^2+4x+9}+\dfrac{5x^2+10x+9}{5x^2+7x+9}=0.$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Điều kiện $\begin{cases} 2x^2+3x+8 \neq 0\\ 2x^2+7x+8 \neq 0.\end{cases}$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho x.

Phương trình tương đương với $\dfrac{2x+5+\frac{8}{x}}{2x+3+\frac{8}{x}}+\dfrac{2x+3+\frac{8}{x}}{2x+7+\frac{8}{x}}=0.$

Đặt $t = 2x + \dfrac{8}{x} + 3$. Phương trình trở thành

$$\frac{t+2}{t}+\frac{t}{t+4}=0 \Leftrightarrow (t+2)(t+4)+t^2=0 \Leftrightarrow t^2+6t+8=0 \left[\begin{aligned} &t=-2\\ &t=-4\end{aligned}\right..$$

Với $t=-2 \Rightarrow 2x+\dfrac{8}{x}+3=-2 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+8}{x}=-5 \Leftrightarrow 2x^2+5x+8=0$ (vô nghiệm).

Với $t=-4 \Rightarrow 2x+\dfrac{8}{x}+3=-4 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+8}{x}=-7 \Leftrightarrow 2x^2+7x+8=0$ (vô nghiệm).

❷ Phương trình tương đương với $\dfrac{5x+6+\frac{9}{x}}{5x+4+\frac{9}{x}}+\dfrac{5x+10+\frac{9}{x}}{5x+7+\frac{9}{x}}=0.$

Đặt $t = 5x + \dfrac{9}{x} \Rightarrow |t| \geq 6\sqrt{5}$. Phương trình trở thành

$$\frac{t+6}{t+4}+\frac{t+10}{t+7}=0 \Leftrightarrow (t+6)(t+7)+(t+4)(t+10)=0 \Leftrightarrow 2t^2+27t+82=0 \Leftrightarrow t=\frac{-27\pm\sqrt{73}}{4}\ (\text{loại}).$$

□

BÀI 4. Giải các phương trình sau:

❶ $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+2}+\dfrac{2x}{x^2-5x+2}=0.$

❷ $\dfrac{2x^2+x+3}{2x^2-7x+3}+\dfrac{3x}{2x^2+6x+3}=0.$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Điều kiện: $\begin{cases} x \neq \dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}\\ x \neq \dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}.\end{cases}$

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả tử và mẫu của hai phân thức cho x ta được phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2-3x+2}{x^2+5x+2}+\frac{2x}{x^2-5x+2}=0\\ \Leftrightarrow\ &\frac{x-3+\frac{2}{x}}{x+5-\frac{2}{x}}+\frac{2}{x-5+\frac{2}{x}}=0 \quad (1)\end{aligned}$$

Đặt $t=x+\dfrac{2}{x}$ thay vào phương trình (1) ta được $\dfrac{t^2-6t+25}{t^2-25}=0$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

❷ Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 3\\ x\neq \dfrac{1}{2}\\ x\neq \dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả tử và mẫu của hai phân thức cho x ta được phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} &\frac{2x^2+x+3}{2x^2-7x+3}+\frac{3x}{2x^2+6x+3}=0\\ \Leftrightarrow\ &\frac{2x+1+\frac{3}{x}}{2x-7+\frac{3}{x}}+\frac{3}{2x+6+\frac{3}{x}}=0 \quad (1)\end{aligned}$$

Đặt $t=2x+\dfrac{3}{x}$ thay vào phương trình (1) ta được $\dfrac{t^2+10t-15}{(t-7)(t+6)}=0\Leftrightarrow t=-5\pm 2\sqrt{10}$.

Với $t=-5+2\sqrt{10}$ ta có phương trình $2x+\dfrac{3}{x}=-5+2\sqrt{10}\Leftrightarrow 2x^2+(5-2\sqrt{10})x+3=0$ (vô nghiệm).

Với $t=-5-2\sqrt{10}$ ta có phương trình

$$2x+\frac{3}{x}=-5-2\sqrt{10}\Leftrightarrow 2x^2+(5+2\sqrt{10})x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\left(-5-2\sqrt{10}\pm\sqrt{41+20\sqrt{10}}\right).$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{1}{4}\left(-5-2\sqrt{10}\pm\sqrt{41+20\sqrt{10}}\right)$.

□

BÀI 5. Giải các phương trình sau:

❶ $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}-8=0$.

❷ $4x^2+\dfrac{4x^2}{(2x+1)^2}-5=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}-16=0$. Điều kiện: $x\neq -3$.

Ta biến đổi phương trình đã cho ta được

$\left(x-\dfrac{3x}{x+3}\right)^2+\dfrac{6x^2}{x+3}-16=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)^2+\dfrac{6x^2}{x+3}-16=0.$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{x+3}$, phương trình đã cho trở thành $t^2+6t-16=0\Leftrightarrow(t-2)(t+8)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=2\\ t=-8.\end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t=2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x+3}=2 \Rightarrow x^2-2x-6=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{7}$.

Trường hợp 2: $t=-8 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x+3}=-8 \Rightarrow x^2+8x+24=0$ (vô nghiệm).

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x_1=1+\sqrt{7}$, $x_2=1-\sqrt{7}$.

❷ Điều kiện: $x\neq -\dfrac{1}{2}$.

Ta biến đổi phương trình trên ta có

$\left(2x-\dfrac{2x}{2x+1}\right)^2+\dfrac{8x^2}{2x+1}-5=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4x^2}{2x+1}\right)^2+\dfrac{8x^2}{2x+1}-5=0$.

Đặt $t=\dfrac{4x^2}{2x+1}$, phương trình đã cho trở thành $t^2+2t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-1+\sqrt{6} \\ t_2=-1-\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $t=-1+\sqrt{6} \Rightarrow \dfrac{4x^2}{2x+1}=-1+\sqrt{6} \Rightarrow 4x^2-2(\sqrt{6}-1)x+\sqrt{6}-1=0$ (vô nghiệm).

Trường hợp 2: $t=-1-\sqrt{6} \Rightarrow \dfrac{4x^2}{2x+1}=-1-\sqrt{6} \Rightarrow 4x^2+2(\sqrt{6}+1)x+\sqrt{6}+1=0$.

Từ đó ta suy ra phương trình có hai nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{6}}{4}$ và $x=\dfrac{-1-\sqrt{6}}{2}$.

□

BÀI 6. Cho phương trình $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{b}{x-a}=2$.

❶ Tìm a,b để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

❷ Tìm a,b để phương trình có nghiệm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Điều kiện $\begin{cases} x\neq a \\ x\neq b \end{cases}$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{ax-a^2}{(x-b)(x-a)}+\frac{bx-b^2}{(x-b)(x-a)}=2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2-3(a+b)x+a^2+b^2+2ab=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta'=(a+b)^2>0 \Leftrightarrow a\neq -b$.

Kết hợp với điều kiện suy ra để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $a\neq 0, b\neq 0$ và $a\neq \pm b$.

❷ Tương tự phần a) ta suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi a và b không đồng thời bằng 0.

□

BÀI 7. Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+2}+\dfrac{2x}{x^2-5x+2}=0$.

b) $\dfrac{2x^2+x+3}{2x^2-7x+3}+\dfrac{3x}{2x^2+6x+3}=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Điều kiện $\begin{cases} x^2+5x+2\neq 0 \\ x^2-5x+2\neq 0. \end{cases}$

Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế cho $x\neq 0$.

Phương trình tương đương $\dfrac{x-3+\dfrac{2}{x}}{x+5+\dfrac{2}{x}}+\dfrac{2}{x-5+\dfrac{2}{x}}=0$. Đặt $t=x+\dfrac{2}{x}$. Phương trình trở thành

$$\frac{t-3}{t+5}+\frac{2}{t-5}=0 \Leftrightarrow (t-3)(t-5)+2(t+5)=0 \Leftrightarrow t^2-6t+25=0 \,(\text{vô nghiệm}).$$

❷ Điều kiện $\begin{cases} 2x^2-7x+3\neq 0 \\ 2x^2+6x+3\neq 0. \end{cases}$

Vì $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế cho $x\neq 0$.

Phương trình tương đương $\dfrac{2x+1+\dfrac{3}{x}}{2x+7+\dfrac{3}{x}}+\dfrac{3}{2x+6+\dfrac{3}{x}}=0$.

Đặt $t=2x+\dfrac{3}{x}\Rightarrow |t|\geq 2\sqrt{6}$. Phương trình trở thành

$$\frac{t+1}{t+7}+\frac{3}{t+6}=0\Leftrightarrow (t+1)(t+6)+3(t+7)=0\Leftrightarrow t^2+10t+27=0\,(\text{vô nghiệm}).$$

□

BÀI 8. Giải các phương trình sau

a) $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}+8=0$.

b) $x^2+\dfrac{x^2}{(2x+1)^2}+5=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Điều kiện $x\neq -3$. Phương trình tương đương với

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{3x}{x+3}+\frac{9x^2}{(x+3)^2}+\frac{6x^2}{x+3}+8=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2+\frac{6x^2}{x+3}+8=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\cdot\frac{x^2}{x+3}+8=0.$$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{x+3}\Rightarrow t^2+6t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned} &t=-2 \\ &t=-4. \end{aligned}\right.$

Với $t=-2\Rightarrow\dfrac{x^2}{x+3}=-2\Leftrightarrow x^2+2x+6=0$ (vô nghiệm).

Với $t=-4\Rightarrow\dfrac{x^2}{x+3}=-4\Leftrightarrow x^2+4x+12=0$ (vô nghiệm).

❷ Điều kiện $x\neq -\dfrac{1}{2}$. Phương trình tương đương với

$$\left(x-\frac{x}{2x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{2x+1}+5=0\Leftrightarrow\frac{4x^4}{(2x+1)^2}+\frac{2x^2}{2x+1}+5=0.$$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{2x+1}\Rightarrow 4t^2+2t+5=0$ (vô nghiệm).

□

BÀI 9. Cho phương trình $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{b}{x-a}=2\,(1)$.

❶ Tìm a,b để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

❷ Tìm a,b để phương trình có nghiệm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Điều kiện $\begin{cases} x\neq a \\ x\neq b. \end{cases}$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow a(x-a)+b(x-b)=2(x-a)(x-b)\Leftrightarrow 2x^2-3(a+b)x+(a+b)^2=0\,(2)$.

Ta có $\Delta=9(a+b)^2-8(a+b)^2=(a+b)^2\geq 0,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$.

❶ (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt khác a, b

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ b^2 - ab \neq 0\\ a^2 - ab \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)^2 > 0\\ b(b-a) \neq 0\\ a(a-b) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a \neq 0\\ b \neq 0\\ a \neq \pm b.\end{cases}$$

❷ (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm kép khác a, b hoặc (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm khác a, b.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a+b)^2 = 0\\ \dfrac{3(a+b)}{4} \neq a\\ \dfrac{3(a+b)}{4} \neq b\end{cases}\\ \begin{cases}(a+b)^2 > 0\\ \left[\begin{array}{l}b^2 - ab \neq 0\\ a^2 - ab \neq 0\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = -b\\ a \neq b\end{cases}\\ \begin{cases}a \neq -b\\ \left[\begin{array}{l}b(b-a) \neq 0\\ a(a-b) \neq 0\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0.$$

□

BÀI 10. Giải các phương trình sau.

a) $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$.

b) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.

c) $2x^3 + x + 3 = 0$.

d) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

e) $2x^3 - 9x + 2 = 0$.

f) $8x^3 - 4x^2 + 10x - 5 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2 - 5x + 1) = 0 \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = \dfrac{1}{4}.\end{array}\right.$

❷ $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = -2\\ x = \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

❸ $2x^3 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -1\\ 2x^2 - 2x + 3 = 0\,(\text{vô nghiệm}).\end{array}\right.$

❹ $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -1\\ x = -2\\ x = -\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

❺ $2x^3 - 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + 4x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\\ x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}.\end{array}\right.$

❻ $8x^3 - 4x^2 + 10x - 5 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(4x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

□

BÀI 11. Giải phương trình sau, biết rằng phương trình có một nghiệm không phụ thuộc vào a, b và $b > 0$: $x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2+2a-b)x - (a^2-b) = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình tương đương với $(x-1)(x^2-2ax+a^2-b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = a \pm \sqrt{b}. \end{array}\right.$ □

BÀI 12. Cho phương trình $mx^3 + (3m-4)x^2 + (3m-7)x + m - 3 = 0\,(1)$.

❶ Giải phương trình với $m = 3$.

❷ Xác định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt không dương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình tương đương với

$$(x+1)\left[mx^2 + 2(m-2)x + m - 3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ g(x) = mx^2 + 2(m-2)x + m - 3 = 0\,(2). \end{array}\right.$$

❶ Với $m = 3$ thì $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ 3x^2 + 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

❷ Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt không dương $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt không dương $(x_1 < x_2 \leq 0)$ khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P \geq 0 \\ S < 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - m > 0 \\ \dfrac{m-3}{m} \geq 0 \\ -\dfrac{m-2}{m} < 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq m < 4.$$

□

BÀI 13. Cho phương trình $x^3 - 2mx^2 + mx + m - 1 = 0\,(1)$. Xác định m để

❶ Phương trình có đúng 1 nghiệm.

❷ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

❸ Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-1)\left[x^2 - (2m-1)x + 1 - m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ g(x) = x^2 - (2m-1)x + 1 - m = 0\,(2). \end{array}\right.$

❶ (1) có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} \text{(2) vô nghiệm} \\ \text{(2) có nghiệm kép bằng 1.} \end{array}\right.$

— (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4(1-m) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < m < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

— (2) có nghiệm khép bằng 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 3 = 0 \\ 3 - 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

❷ (1) có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}(2) \text{ có hai nghiệm phân biệt và nhận } x=1 \text{ là một nghiệm}\\ (2) \text{ có nghiệm kép khác } 1.\end{array}\right.$

— (2) có hai nghiệm phân biệt và nhận $x = 1$ là một nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ g(1) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2 - 3 > 0\\ 3 - 3m = 0\end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

— (2) có nghiệm kép khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta = 0\\ g(1) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2 - 3 = 0\\ 3 - 3m \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

❸ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ g(1) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2 - 3 > 0\\ 3 - 3m \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m > \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ m < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\\ m \neq 1.\end{cases}$$

□

BÀI 14. Cho phương trình $x^3 - 2mx^2 + (2m^2 - 1)x - m(m^2 - 1) = 0\,(1)$. Xác định m để

❶ Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

❷ Phương trình có 3 nghiệm phân biệt dương.

❸ Phương trình có 3 nghiệm phân biệt âm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x - m)(x^2 - mx + m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = m\\ g(x) = x^2 - mx + m^2 - 1 = 0\,(2).\end{array}\right.$

❶ (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ (2) có hai nghiệm phân biệt khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ g(m) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 4(m^2 - 1) > 0\\ m^2 - 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 - 3m^2 > 0\\ m \neq \pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{2}{\sqrt{3}} < m < \dfrac{2}{\sqrt{3}}\\ m \neq \pm 1.\end{cases}$$

❷ (1) có ba nghiệm phân biệt dương khi và chỉ (2) có hai nghiệm phân biệt dương khác m và $m > 0$

$$\begin{cases}\Delta > 0\\ S > 0\\ P > 0\\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 - 3m^2 > 0\\ m > 0\\ m^2 - 1 > 0\\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

❸ (1) có ba nghiệm phân biệt âm khi và chỉ (2) có hai nghiệm phân biệt âm khác m và $m < 0$

$$\begin{cases}\Delta > 0\\ S < 0\\ P > 0\\ m < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 - 3m^2 > 0\\ m < 0\\ m^2 - 1 > 0\\ m < 0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} < m < -1.$$

□

BÀI 15. Xác định m để phương trình $x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2m(2m-1)=0\,(1)$ có 2 nghiệm phân biệt.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình tương đương với $(x+m)\left[x^2-(2m+1)x+2m-2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-m\\ x^2-(2m+1)x+2m-2=0\,(2)\end{array}\right.$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{(2) có hai nghiệm phân biệt và có một nghiệm } x=-m\\ \text{(2) có nghiệm kép khác } -m.\end{array}\right.$

— (2) có hai nghiệm phân biệt và nhận $x=-m$ làm nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ m^2+m(2m+1)+2m-2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(2m+1)^2-8(m-1)>0\\ 3m^2+3m-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-4m+9>0\,\text{(luôn đúng)}\\ m=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{6}.\end{cases}$

— (2) có nghiệm kép khác $-m \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=0\\ 3m^2+3m-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-4m+9=0\,\text{(vô nghiệm)}\\ 3m^2+3m-2=0.\end{cases}$

□

BÀI 16. Cho phương trình $2x^3+2(6m-1)x^2-3(2m-1)x-3(1+2m)=0\,(1)$. Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt có tổng bình phương bằng 28.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình tương đương với

$$(x-1)\left[2x^2+12mx+3(1+2m)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ 2x^2+12mx+3(1+2m)=0\,(2).\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ f(1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}36m^2-12m-6=0\\ 17+6m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}\\ -\dfrac{17}{6}\neq m<\dfrac{1-\sqrt{7}}{6}.\end{array}\right.$

Khi đó (2) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases}x_1+x_2=-6m\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{3(1+2m)}{2}.\end{cases}$

Theo giả thiết suy ra

$x_1^2+x_2^2+1^2=28 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=27 \Leftrightarrow 36m^2-3(1+2m)=27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\,\text{(thỏa mãn)}\\ m=-\dfrac{1}{12}\,\text{(loại)}.\end{array}\right.$

Vậy $m=1$ thỏa mãn bài. □

BÀI 17. Giải các phương trình sau.

a) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$.

b) $x^4-6x^3-x^2+54x-72=0$.

c) $x^4-2x^3-6x^2+8x+8$.

d) $2x^4-13x^3+20x^2-3x-2=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & x^4-10x^3+9x^2+26x^2-50x+24=0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2(x-1)(x-9)+(x-1)(26x-24)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(x^3-9x^2-26x-24)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

❷ Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^4-9x^2)-(6x^3-54x)+(8x^2-72)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2-9)(x^2-6x+8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=9 \\ x^2-6x+8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 3 \\ x=2 \\ x=4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

❸ Phương trình tương đương với

$$(x^4-4x^2)-(2x^3-8x)-(2x^2-8)=0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-2x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=1\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

❹ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (2x^4-5x^3+2x^2)-(8x^3-20x^2+8x)-(2x^2-5x+2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x^2-5x+2)(x^2-4x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=2\pm\sqrt{5}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

□

BÀI 18. Giải các phương trình sau.

a) $x^4-3x^2-4x-3=0$. b) $x^4-4x^3+3x^2-2x-1=0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Phương trình tương đương với

$$(x^2-1)^2-(x+2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-3=0 \\ x^2+x+1=0\,(\text{vô nghiệm}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

❷ Phương trình tương đương với

$$(x^2-2x)^2-(x+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-1=0 \\ x^2-x+1=0\,(\text{vô nghiệm}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

□

BÀI 19. Cho phương trình $mx^4-(m+2)x^3+2(1-2m)x^2+4(2+m)x-8=0\,(1)$.

❶ Giải phương trình với $m=2$.

❷ Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

❸ Xác định m để phương trình có đúng 4 nghiệm phân biệt.

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\begin{aligned}(1)\quad &\Leftrightarrow\quad mx^2\left(x^2-4\right)-(m+2)x\left(x^2-4\right)+2(x^2-4)=0\\ &\Leftrightarrow\quad (x^2-4)\left[mx^2-(m+2)x+2\right]=0\\ &\Leftrightarrow\quad (x^2-4)(x-1)(mx-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\\x=1\\mx-2=0\,(2).\end{array}\right.\end{aligned}$$

❶ Với $m=2$ thì $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\\x=1.\end{array}\right.$

❷ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất thuộc $\{-2;1;2\}$.

— (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow m=0$.

— (2) có nghiệm duy nhất thuộc $\{-2;1;2\}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{m}=-2\\ \dfrac{2}{m}=2\\ \dfrac{2}{m}=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=1\\m=2.\end{array}\right.$

❸ (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm duy nhất khác $-2;1;2\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \dfrac{2}{m}\neq -2\\ \dfrac{2}{m}\neq 1\\ \dfrac{2}{m}\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\m\neq -1\\m\neq 2\\m\neq 1.\end{cases}$

□

BÀI 20. Cho phương trình $mx^4-6mx^3+(2+11m)x^2-6(m+1)x+4=0\,(1)$.

❶ Giải phương trình với $m=1$.

❷ Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

❸ Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

❹ Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phương trình tương đương với $(x-1)(x-2)(mx^2-3mx+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\mx^2-3mx+2=0\,(2).\end{array}\right.$

❶ Với $m = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

❷ Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ có nghiệm kép } x = 1 \text{ hoặc } x = 2 \\ (2) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x = 1 \text{ và } x = 2. \end{array}\right.$

— (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \begin{cases} m \neq 0 \\ 9m^2 - 8m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ 0 < m < \dfrac{8}{9}. \end{array}\right.$

— (2) có nghiệm kép $x = 1$ hoặc $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ 2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 8m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$

— (2) có 2 nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2 - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$

❸ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ có nghiệm kép khác } 1; 2 \\ (2) \text{ có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm bằng 1 hoặc 2.} \end{array}\right.$

— (2) có nghiệm kép khác $1; 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{3}{2} \neq 1 (\text{ luôn đúng}) \\ \dfrac{3}{2} \neq 2 (\text{ luôn đúng}) \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{8}{9}. \end{array}\right.$

— (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm bằng 1 hoặc 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2 - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 8m > 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

❹ (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác $1; 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 8m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \dfrac{8}{9} < m \neq 1. \end{array}\right.$$

□

BÀI 21. Cho phương trình $x^4 - 4mx^3 + 4(m^2 - 1)x^2 + 12x - 9 = 0\,(*)$.

❶ Xác định m để phương trình có đúng 1 nghiệm.

❷ Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

❸ Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

❹ Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

✍ **LỜI GIẢI.**

$(*) \Leftrightarrow (x^2 - 2mx)^2 - (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2(m + 1)x + 3 = 0\,(1) \\ x^2 - 2(m - 1)x - 3 = 0\,(2). \end{array}\right.$

Nhận xét. *Xét phương trình (2), $\Delta' = (m - 1)^2 + 3 > 0,\ \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt.*

Nếu x_0 là nghiệm chung của (1) và (2) thì $\begin{cases} x_0^2 - 2(m + 1)x_0 + 3 = 0 \\ x_0^2 - 2(m - 1)x_0 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \dfrac{3}{2}.$

Với $x_0 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow m = \dfrac{3}{4}$. *Khi đó* $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2x^2 - 7x + 6 = 0 \\ &2x^2 + x - 6 = 0 \end{aligned}\right. \left[\begin{aligned} &x = 2 \\ &x = \dfrac{3}{2} \\ &x = -2. \end{aligned}\right.$

❶ Không tồn tại m để $(*)$ có đúng 1 nghiệm.

❷ $(*)$ có đúng hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &(1) \text{ vô nghiệm} \\ &(1) \text{ có nghiệm và nghiệm đó là nghiệm của } (2). \end{aligned}\right.$

— (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{3} < m < -1 + \sqrt{3}$.

— (1) có nghiệm và nghiệm đó là nghiệm của (2) $\Rightarrow m = \dfrac{3}{4}$ (loại).

❸ $(*)$ có đúng ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt và có đúng một nghiệm chung với (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 3 > 0 \\ m = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{4}$.

❹ $(*)$ có đúng bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt và $m \neq \dfrac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 3 > 0 \\ m \neq \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &m > -1 + \sqrt{3} \\ &m < -1 - \sqrt{3} \end{aligned}\right. \\ &m \neq \dfrac{3}{4}. \end{aligned}\right.$$

□

BÀI 22. Giải các phương trình sau.

a) $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

c) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

d) $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình trở thành

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = -1 \text{ (loại)} \\ &t = 2 \end{aligned}\right. \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

❷ Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình trở thành

$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = 1 \\ &t = \dfrac{1}{4} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x^2 = 1 \\ &x^2 = \dfrac{1}{4} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \pm 1 \\ &x = \pm\dfrac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

❸ Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình trở thành

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = 1 \\ &t = 2 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x^2 = 1 \\ &x^2 = 2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \pm 1 \\ &x = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}\right.$$

❹ Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình trở thành

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = 2 - \sqrt{3} \\ &t = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x^2 = 2 - \sqrt{3} \\ &x^2 = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \pm\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}. \end{aligned}\right.$$

□

BÀI 23. Cho phương trình $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0\,(1)$. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đặt $t=x^2$, $t\geq 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2-2(m+1)t+2m+1=0\,(2)$.

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt dương $0<t_1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2-2m-1=0\\ 2(m+1)>0\\ 2m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m\neq 0.$$

□

BÀI 24. Giải các phương trình sau.

a) $x-\sqrt{2x+3}=0$.

b) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$.

c) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $\sqrt{2x+3}=x \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ 2x+3=x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ x^2-2x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

❷ Điều kiện $\begin{cases}3x+4\geq 0\\ 2x+1\geq 0\\ x+3\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}$. Phương trình tương đương với

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3x+4} \Leftrightarrow (x+3)+2x+1+2\sqrt{(x+3)(2x+1)}=3x+4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(2x+1)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\,(\text{loại})\\ x=-\dfrac{1}{2}\,(\text{thỏa mãn}).\end{cases}$$

❸ Điều kiện $\begin{cases}5x-1\geq 0\\ 3x-2\geq 0\\ x-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$.

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{5x-1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow x+2=2\sqrt{(x-1)(3x-2)}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2=4(x-1)(3x-2) \Leftrightarrow 11x^2-24x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\,(\text{thỏa mãn})\\ x=\dfrac{2}{11}\,(\text{loại}).\end{cases}$$

□

BÀI 25. Giải các phương trình sau.

a) $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31$.

b) $(x + 5)(2 - x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$.

c) $\sqrt{(x + 1)(2 - x)} = 1 + 2x - 2x^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $t = \sqrt{x^2 + 11}$, $t \geq \sqrt{11}$. Khi đó phương trình trở thành

$$t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -5\,(\text{loại}). \end{array}\right.$$

Với $t = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 11} = 4 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

❷ Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}$, $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -5\,(\text{loại}). \end{array}\right.$$

Với $t = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4. \end{array}\right.$

❸ Đặt $t = \sqrt{1 + x - x^2}$, $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{2}\,(\text{loại}). \end{array}\right.$$

Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + x - x^2} = 1 \Rightarrow -x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0. \end{array}\right.$

□

BÀI 26. Giải các phương trình sau.

a) $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$.

b) $\sqrt{2x^2 + 5x + 2} - 2\sqrt{2x^2 + 5x - 6} = 1$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $t = x^2 - 3x + 3$ với $t \geq 0$. Khi đó phương trình có dạng

$$\sqrt{t} + \sqrt{t + 3} = 3 \Leftrightarrow t + t + 3 + 2\sqrt{t(t + 3)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 3t} = 3 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t^2 + 3t = (3 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

❷ Đặt $t = 2x^2 + 5x + 2$ với $t \geq 8$. Khi đó phương trình có dạng

$$\sqrt{t} - 2\sqrt{t - 8} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 2\sqrt{t - 8} + 1 \Leftrightarrow t = 4(t - 8) + 4\sqrt{t - 8} + 1.$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{t - 8} = 31 - 3t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \dfrac{31}{3} \\ 16(t - 8) = (31 - 3t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \dfrac{31}{3} \\ 9t^2 - 202t + 1089 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = \dfrac{21}{9}\,(\text{loại}). \end{array}\right.$$

Với $t = 9 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$

□

BÀI 27. Giải các phương trình sau.

a) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{2x^2 + 6x + 2} = -\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đặt $t = x^2 + 3x + 1$ với $t \geq 0$, phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \sqrt{t+1} - 2\sqrt{2t} = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{t+1} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2t} \\ \Leftrightarrow\ & t + 3 + 2\sqrt{2(t+1)} = 8t \Leftrightarrow 2\sqrt{2t+2} = 7t - 3 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} t \geq 1 \\ 4(2t+2) = (7t-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ 49t^2 - 50t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1. \end{aligned}$$

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3. \end{array}\right.$

❷ Đặt $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = t, t \geq 0$. Vì $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 1$ nên phương trình trở thành $\dfrac{1}{t} + t = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Khi đó

$\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 1 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

□

BÀI 28. Giải phương trình $(x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -3$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Điều kiện $\dfrac{x+1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x \leq -1. \end{array}\right.$

Đặt $t = (x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} \Rightarrow (x-3)(x+1) = t^2$. Khi đó phương trình có dạng

$$t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = -1. \end{array}\right.$$

Với $t = -3 \Rightarrow (x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ (x-3)(x+1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{13}$.

Với $t = -1 \Rightarrow (x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ (x-3)(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{5}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1 - \sqrt{13}$ và $x = 1 - \sqrt{5}$. □

BÀI 29. Giải phương trình $2\sqrt[n]{(1+x)^2} - 3\sqrt[n]{1-x^2} + \sqrt[n]{(1-x)^2} = 0$ với n chẵn.

✍ **LỜI GIẢI.**

Nhận xét. $x = \pm 1$ *không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế của phương trình cho* $\sqrt[n]{(1-x)^2} \neq 0$, *ta được*

$$2\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}-3\sqrt[n]{\frac{1-x}{1+x}}+1=0$$

Vì $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}}=1$ nên nếu đặt $t=\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}}$ với $t\geq 0$, suy ra $\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{1}{t}$. Khi đó phương trình trở thành $2t-\dfrac{3}{t}+1=0\Leftrightarrow 2t^2+t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{3}{2}\text{ (loại)}. \end{array}\right.$

Với $t=1$, ta có $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}}=1\Leftrightarrow\dfrac{1+x}{1-x}=1\Leftrightarrow x=0$. □

BÀI 7 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Trước hết các em cần ôn lại kiến thức của phương pháp giải toán bằng cách:

1. Lập phương trình bậc nhất một ẩn.
2. Lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai một ẩn, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập phương trình.

— Chọn ẩn và xác định điều kiện thích hợp cho ẩn. Chú ý phải ghi rõ đơn vị của ẩn.

— Biểu thị các đại lượng chưa biết khác theo ẩn.

— Dựa vào các dữ kiện và điều kiện của bài toán để lập phương trình.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Thử lại, nhận định kết quả và trả lời.

Các bài toán đưa ra thường thuộc một trong 5 dạng sau:

Dạng 1: Bài toán chuyển động.

Dạng 2: Bài toán về số và chữ số.

Dạng 3: Bài toán vòi nước.

Dạng 4: Bài toán có nội dung hình học.

Dạng 5: Bài toán về phần trăm - năng suất.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Bài toán chuyển động

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Một đoàn xe vận tải dự định điều số xe cùng loại để vận chuyển 40 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành, đoàn xe được giao thêm 14 tấn nữa. Do đó phải điều thêm 2 xe cùng loại và mỗi xe ban đầu phải chở thêm nửa tấn nữa. Tính số xe phải điều theo dự định.

✍ LỜI GIẢI.

1. Lập phương trình.

Gọi x là số xe phải điều theo dự định, điều kiện $0 < x \in \mathbb{N}$.

Với x xe vận chuyển 40 tấn hàng, suy ra mỗi xe phải chở số tấn hàng theo dự định là $\dfrac{40}{x}$.

Vì đoàn xe phải nhận thêm 14 tấn hàng nên số hàng lúc sau là $40 + 14 = 54$.

Vì đoàn xe phải điều thêm 2 xe nên số xe lúc sau là $x + 2$ chiếc, và mỗi xe phải chở số hàng lúc sau bằng $\dfrac{54}{x+2}$.

Vì mỗi xe phải chở thêm nửa tấn nên ta có phương trình $\dfrac{40}{x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{54}{x+2}$.

2. Giải phương trình.

$$\begin{aligned}
&\frac{40}{x}+\frac{1}{2}=\frac{54}{x+2}\\
\Leftrightarrow\ & 80(x+2)+x(x+2)-108x=0\\
\Leftrightarrow\ & x^2-26x+160=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=10\\x=16\end{array}\right.
\end{aligned}$$

3. Kết luận. Vậy số xe dự định phải điều là 10 xe hoặc 16 xe.

□

Nhận xét. *Như vậy trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:*

— *Chúng ta lựa chọn ẩn x cho giá trị cần tìm là số xe phải điều.*

— *Việc thiết lập phương trình dựa trên phép so sánh khối lượng mỗi xe phải chở.*

— *Lời giải được trình bày thành ba phần độc lập với nhau với mục đích minh họa để giúp các em học sinh hiểu được cách trình bày bài toán theo thuật toán đã chỉ ra. Tuy nhiên, kể từ các ví dụ sau chúng ta không cần phân tách như vậy mà chỉ yêu cầu các em học sinh khi đọc phải biết mình đang ở bước nào.*

VÍ DỤ 2 (Bài 65/tr65-SGK). Một xe lửa đi từ Hà Nội vào Bình Sơn (Quảng Ngãi). Sau 1 giờ, một xe lửa khác đi từ Bình Sơn ra Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường Hà Nội - Bình Sơn dài 900 km.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x là vận tốc của xe lửa đi từ Hà Nội ($x>0$, đơn vị km/h).

Vận tốc xe lửa đi từ Bình Sơn là $x+5$.

Hai xe gặp nhau tại một ga ở chính giữa quãng đường nên ta có phương trình

$$\begin{aligned}
&\frac{450}{x}=\frac{450}{x+5}+1\\
\Leftrightarrow\ & 450(x+5)=450x+x(x+5)\\
\Leftrightarrow\ & x^2-5x-2250\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=45\\x=-50\ \text{loại}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy vận tốc hai xe lửa là 45 km/h và 50 km/h. □

VÍ DỤ 3 (Bài 52/tr60 - SGK). Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km. Một canô đi từ bến A đến bến B, nghỉ 40 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Kể từ lúc khởi hành đến khi về lại bến A hết tất cả 6 giờ. Hãy tìm vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của nước chảy là 3 km/h.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đổi 40 phút $= \dfrac{2}{3}$ giờ.

Gọi x là vận tốc của canô trong nước yên lặng ($x > 3$, đơn vị km/h).

Suy ra, vận tốc của canô đi xuôi theo dòng nước là $x + 3$ và đi ngược dòng là $x - 3$.

Ta có phương trình

$$\frac{30}{x+3} + \frac{30}{x-3} + \frac{2}{3} = 6 \Leftrightarrow 4x^2 - 45x - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -\dfrac{3}{4} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc thực của canô là 12 km. □

VÍ DỤ 4 (Bài 43/tr58-GGK). Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120 km. Trên đường đi, xuồng nghỉ lại 1 giờ tại thị trấn Năm Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường lúc đi là 5 km với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi vận tốc lúc xuồng đi là x ($x > 5$, đơn vị: km/h).

Suy ra, vận tốc lúc xuồng về là $x - 5$ (km/h).

Thời gian chạy xuồng lúc đi (không kể thời gian nghỉ) là $\dfrac{120}{x}$.

Thời gian xuồng lúc về là $\dfrac{125}{x-5}$.

Ta có phương trình

$$\frac{125}{x-5} = \frac{120}{x} + 1 \Leftrightarrow 125x = 120(x-5) + x(x-5) \Leftrightarrow x^2 - 10x - 600 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 30 \\ x = -20 \text{ loại.} \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc của xuồng lúc đi là 30 km/h. □

VÍ DỤ 5. Hai bến sông A và B cách nhau 40 km. Cùng một lúc với canô đi xuôi từ A có một chiếc bè trôi từ A với vận tốc 3 km/h. Sau khi đi đến B canô trở về bến A ngay và gặp bè khi đã trôi được 8 km. Tính vận tốc riêng của canô. Biết vận tốc của canô không thay đổi.

✍ **LỜI GIẢI.**

Một chiếc bè trôi với vận tốc 3 km/h, tức là vận tốc dòng nước là 3 km/h. Gọi vận tốc riêng của canô là x ($x > 0$, km/h).

Từ giả thiết, suy ra:

— Vận tốc canô đi xuôi dòng là $x + 3$.

— Vận tốc canô đi ngược dòng là $x - 3$.

Vậy thời gian canô đi xuôi từ A đến B là $\dfrac{40}{x+3}$.

Khi đi từ B trở về A, canô gặp bè đã trôi được 8 km, suy ra:

— Thời gian để bè trôi được 8 km là $\dfrac{8}{3}$.

— Quãng đường từ B đến chỗ gặp bè là $40 - 8$ km.

Vậy thời gian canô đi từ B đến chỗ gặp bè là $\dfrac{32}{x-3}$.

Nhận thấy rằng, canô và bè cùng khởi hành một lúc và thời gian chuyển động của hai vật đến chỗ gặp

nhau là như nhau.
Vậy ta có phương trình

$$\frac{40}{x+3}+\frac{32}{x-3}=\frac{8}{3} \Leftrightarrow 120(x-3)+96(x+3)-8(x+3)(x-3) \Leftrightarrow 8x^2-216x=0 \Rightarrow x=27.$$

Vậy vận tốc thực của canô là 27 km/h. □

> **VÍ DỤ 6.** Một người đi xe máy trên quãng đường AB dài 120 km với vận tốc định trước. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc đó, người lái xe tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

✍ **LỜI GIẢI.**
Đổi 24 phút $=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$ giờ.
Gọi vận tốc dự định của người đi xe máy là x ($x>0$, đơn vị: km/h).
Suy ra, thời gian dự định để đi hết quãng đường AB là $\frac{120}{x}$ giờ.
Với giả thiết:

— Thời gian người đi xe máy đi hết $\frac{1}{3}$ quãng đường (tương ứng với $\frac{120}{3}=40$ km) là $\frac{40}{x}$ giờ.

— $\frac{2}{3}$ quãng đường còn lại người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h nên thời gian người đi xe máy đi hết $\frac{2}{3}$ quãng đường là $\frac{80}{x+10}$ giờ.

— Do người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút nên ta có phương trình

$$\begin{aligned}
& \frac{120}{x}=\frac{40}{x}+\frac{80}{x+10}+\frac{2}{5}\\
\Leftrightarrow\ & 120\cdot 5(x+10)=40\cdot 5(x+10)+80\cdot 5x+2x(x+10)\\
\Leftrightarrow\ & 2x^2+20x+4000=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=40\\ x=-50\ \text{(loại).}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy ta được:

— Vận tốc dự định là 40 km/h và thời gian dự định là $\frac{120}{40}=3$ giờ.

— Thời gian xe lăn bánh trên đường là thời gian dự định trừ đi thời gian đến sớm bằng: $3-\frac{2}{5}=2$ giờ 36 phút.

□

🗀 DẠNG 2. Bài toán về số và chữ số

Phương pháp giải:

> **VÍ DỤ 1 (Bài 41/tr58-SGK).** Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau là 5 và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x là số Minh chọn, thì số Lan chọn là $x-5$ ($x \in \mathbb{R}$).

Ta có phương trình $x(x-5)=150 \Leftrightarrow x^2-5x-150=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-10 \\ x=15 \end{array}\right.$.

Vậy Lan và Minh có thể chọn một trong hai cặp số $(10;15)$ hoặc $(-10;-15)$. □

⚠ *Ta cũng có thể gọi các số cần tìm là x và $x+5$.*

Kết quả ta cũng có hai cặp $(10;15)$ hoặc $(-10;-15)$ thỏa mãn các điều kiện đề bài.

VÍ DỤ 2. Tìm hai số biết hiệu của chúng bằng bằng 8 và tổng các bình phương của chúng bằng 424.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi số thứ nhất là x.

Với giả thiết:

— Hiệu của chúng bằng 8 nên ta có số thứ hai là $x+8$.

— Tổng bình phương của hai số bằng 424 nên ta có phương trình

$$x^2+(x+8)^2=424 \Leftrightarrow 2x^2+16x-360=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=-18. \end{array}\right.$$

Vậy ta được:

— Nếu số thứ nhất là 10 thì số thứ hai bằng 18.

— Nếu số thứ nhất là -18 thì số thứ hai bằng -10.

□

⚠ *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:*

1. *Cho dù bài toán yêu cầu chúng ta đi tìm hai số (điều này có thể khiến học sinh hiểu theo hướng cần hai ẩn) nhưng cần hiểu rằng, số thứ hai được xác định thông qua số thứ nhất (bởi hiệu giữa chúng bằng 8). Do đó chúng ta lựa chọn ẩn x cho số thứ nhất và dễ thấy số thứ hai là $x+8$.*
2. *Việc thiết lập phương trình là đơn giản, khi đã có được hai số cần tìm.*
3. *Với nhận định trong 1, bài toán có thể được giải thông qua hệ hai ẩn x, y (với x là số thứ nhất và y là số thứ hai), cụ thể:*
   — *Hiệu của chúng bằng 8 nên $x-y=8$.*
   — *Tổng bình phương của hai số bằng 424 nên $x^2+y^2=424$.*
   — *Từ đây ta có hệ phương trình* $\begin{cases} x-y=8 \\ x^2+y^2=424. \end{cases}$
   Học sinh tự giải bằng cách chuyển về phương trình bậc hai.

VÍ DỤ 3 (Bài 64/tr64-SGK). Bài toán yêu cầu tìm tích của một số dương với một số lớn hơn nó 2 đơn vị nhưng bạn Quân nhầm đầu bài lại tính tích của một số dương với một số bé hơn nó 2 đơn vị. Kết quả của bạn Quân là 120. Hỏi nếu làm đúng đầu bài đã cho thì kết quả phải là bao nhiêu?

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x là số dương cần tìm.
Theo Quân thì x thỏa mãn phương trình

$$x(x-2)=120 \Leftrightarrow x^2-2x-120=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-10 \ \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy số dương cần tìm đó là 12 và nếu làm đúng thì kết quả là $12 \cdot (12+2) = 168$. □

VÍ DỤ 4 (Bài 44/tr59-SGK). Đố em tìm được một số mà một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị rồi nhân với một nửa của nó bằng một nửa đơn vị.

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi x là số phải tìm. Ta có phương trình

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Vậy có hai số thỏa mãn điều kiện. □

VÍ DỤ 5 (Bài 45/tr59-SGK). Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi x là số tự nhiên thì số kế tiếp của nó là $x+1$ $(x \in \mathbb{N})$.
Ta có phương trình

$$x(x+1)=x+x+1+109 \Leftrightarrow x^2-x-110=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=-10 \ \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy hai số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 11 và 12. □

VÍ DỤ 6. Một lớp học được nhà trường phát phần thưởng ba lần và chia đều cho các em học sinh. Lần thứ nhất chia hết 66 quyển vở nhưng vắng 5 em, lần thứ hai chia hết 125 quyển vở nhưng vắng 2 em, còn lần thứ ba thì không vắng em nào và chia hết 216 quyển vở. Biết một học sinh có mặt cả ba lần đã nhận được số vở (trong lần ba) bằng tổng số vở đã nhận trong hai lần đầu. Tính số học sinh.

✍ **LỜI GIẢI.**
Gọi số học sinh là x ($x > 0$, đơn vị: em). Trong lần phát thưởng thứ nhất:
- Số học sinh được nhận vở là $x-5$.
- Và mỗi em được nhận $\dfrac{66}{x-5}$.

Trong lần phát thưởng thứ hai:
- Số học sinh được nhận vở là $x-2$.
- Và mỗi em được nhận $\dfrac{125}{x-2}$.

Trong lần phát thưởng thứ ba:
- Số học sinh được nhận vở là x.

— Và mỗi em được nhận $\dfrac{216}{x}$.

Biết một học sinh có mặt cả ba lần đã nhận được số vở (trong lần ba) bằng tổng số vở đã nhận trong hai lần đầu nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{66}{x-5}+\frac{125}{x-2}=\frac{216}{x} \\ \Leftrightarrow\ & 66x(x-2)+125x(x-5)-216(x-2)(x-5) \\ \Leftrightarrow\ & 25x^2-755x+2160=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{16}{5} \quad (\text{loại}) \\ x=27. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy trong lớp có 27 học sinh. □

DẠNG 3. Bài toán vòi nước

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1. Có hai vòi nước. Người ta mở vòi thứ nhất cho vòi chảy đầy một bể nước cạn rồi khóa lại. Sau đó mở vòi thứ hai cho nước chảy ra hết với thời gian lâu hơn so với thời gian vòi một chảy là 4 giờ. Nếu cùng mở cả hai vòi thì bể đầy sau 19 giờ 15 phút. Hỏi vòi thứ nhất chảy trong bao lâu mới đầy bể khi vòi thứ hai khóa lại.

LỜI GIẢI.

Ta thực hiện đổi đơn vị 19 giờ 15 phút $=\dfrac{77}{4}$ giờ.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chay đầy bể là x giờ, điều kiện $x>0$.

Suy ra, mỗi giờ vòi một chảy vào bể được $\dfrac{1}{x}$ bể.

Với giả thiết:

— Thời gian vòi thứ hai chảy cạn bể là $x+4$, suy ra mỗi giò vòi thứ hai chảy ra được $\dfrac{1}{x+4}$ bể.

— Nếu mở cả hai vòi thì sau 19 giờ 15 phút mới đầy bể, suy ra mỗi giờ cả hai vòi cùng chảy thì được $\dfrac{4}{77}$ bể.

Từ đó ta có phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}=\frac{4}{77} \\ \Leftrightarrow\ & 77(x+4)-77x-4x(x+4)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2+16x-308=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-11 \quad (\text{loại}). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy sau 7 giờ thì vòi thứ nhất chảy đầy bể khi vòi thứ hai khóa. □

Trong bài toán trên, các em cần lưu ý:

— *Vòi thứ nhất chảy để cho nước vào bể.*

— *Vòi thứ hai chảy để lấy nước từ bể ra.*

Do đó khi lập phương trình ta phải lấy thời gian của vòi thứ nhất trừ thời gian của vòi thứ hai: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{77}$.

Còn trong trường hợp cả hai vòi cùng chảy vào bể thì ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{4}{77}$.

DẠNG 4. Bài toán có nội dung hình học

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1 (Bài 46/tr59-SGK). Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 240 m^2. Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất.

LỜI GIẢI.

Gọi x là chiều dài hình chữ nhật ($x > 4$, đơn vị: m).

Suy ra, chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{240}{x}$.

Ta có phương trình

$$\begin{aligned} & (x-4)\left(\frac{240}{x}+3\right) = 240 \\ \Leftrightarrow\ & (x-4)(240+3x) = 240x \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 - 12x - 960 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = -16 \ \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy hình chữ nhật có chiều dài là 20 m và chiều rộng là 12 m. □

VÍ DỤ 2. Tính chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật. Biết hình chữ nhật có chu vi bằng 340 m và diện tích bằng 7200 m^2.

LỜI GIẢI.

Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x ($x > 0$, đơn vị: m).

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là y ($0 < y < x$, đơn vị: m).

Do hình chữ nhật có chu vi 340 m và diện tích 7200 m^2 nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(x+y) = 340 \\ xy = 7200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 170 \\ xy = 7200. \end{cases}$$

Theo định lí Vi-ét x, y là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 170X + 7200 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 80 \\ X = 90. \end{array}\right.$$

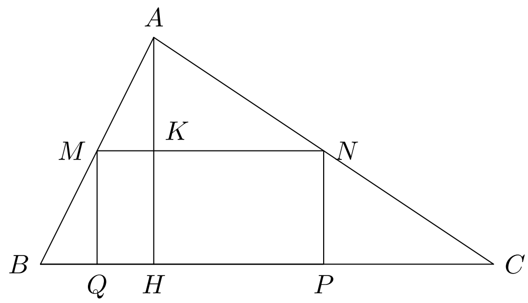
Vậy hình chữ nhật có chiều dài bằng 90 m và chiều rộng bằng 80 m. □

⚠ *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:*

— *Với hai giá trị phải tìm chúng ta lựa chọn nó cho hai ẩn tương ứng. Từ đó, cần đi thiết lập một hệ hai phương trình theo hai ẩn đó.*
— *Hệ phương trình được giải nhờ hệ thức Vi-ét*

VÍ DỤ 3 (Bài 66/tr64-SGK). Cho tam giác ABC có $BC = 16$ cm, đường cao $AH = 12$ cm. Một hình chữ nhật $MNPQ$ có đỉnh M thuộc cạnh AB, đỉnh N thuộc cạnh AC còn hai đỉnh P và Q thuộc cạnh BC. Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AB sao cho diện tích của hình chữ nhật đó bằng 36 cm^2.

✍ LỜI GIẢI.



Ta có $S_{MNPQ} = MN \cdot NP = MN(AH - AK)$
$\Rightarrow MN(AH - AK) = 36.$ (1)
Lại có $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$ nên $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AK}{AH} = k$
$\Rightarrow MN = k \cdot NC = 16k;\ AK = k \cdot AH = 12k.$

Thay vào (1) ta được $16k(12 - 12k) = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{1}{4} \\ k = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$

Vậy điểm M cần chọn trên cạnh AB sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{4}$ hoặc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3}{4}$. □

VÍ DỤ 4. Một thửa ruộng hình chữ nhật, một người đi theo chiều dài hết 1 phút 5 giây, đi theo chiều rộng hết 39 giây. Người ta làm một lối đi xung quanh thửa ruộng rộng 1,5 m thì diện tích còn lại là 5529 m^2. Tính kích thước của thửa đất.

✍ LỜI GIẢI.

Đổi 1 phút 5 giây = 65 giây.
Gọi chiều dài của thửa ruộng là x ($x > 0$, đơn vị: m).
Gọi chiều rộng của thửa ruộng là y ($y > 0$, đơn vị: m).
Đi bộ theo chiều dài hết 65 giây, theo chiều rộng hết 39 giây nên ta có tỉ số $\dfrac{x}{y} = \dfrac{65}{39} = \dfrac{5}{3}$. (1)
Người ta làm một lối đi xung quanh thửa ruộng rộng 1,5 m do đó:

— Chiều dài còn lại là $x - 3$.
— Chiều rộng còn lại là $y - 3$.

Biết diện tích còn lại là 5529 m^2 nên ta có phương trình $(x-3)(y-3) = 5529$. (2)
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{3} \\ (x-3)(y-3) = 5529 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y}{3} & (3) \\ (x-3)(y-3) = 5529 & (4). \end{cases}$$

Thay (3) vào (4) ta được

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{5y}{3}-3\right)(y-3)=5529\\
\Leftrightarrow\ &(5y-9)(y-3)=16587\\
\Leftrightarrow\ &5y^2-24y-16560=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} y=60\\ y=-\dfrac{276}{5}\ \text{(loại)}\end{array}\right.\Rightarrow x=100.
\end{aligned}$$

Vậy thửa ruộng có chiều rộng bằng 60 m và chiều dài bằng 100 m. □

DẠNG 5. Bài toán về phần trăm - năng suất

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1 (Bài 63/tr64-SGK). Sau hai năm, số dân của một thành phố tăng từ 2000000 người lên 2020050 người. Hỏi trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng bao nhiêu phần trăm?

LỜI GIẢI.

Gọi x là tỉ lệ tăng dân số hàng năm của thành phố ($x>0$, đơn vị: %).

Suy ra, số dân tăng sau năm thứ nhất là $2000000x$.

Do đó, sau năm thứ nhất số dân thành phố là $2000000+2000000x=2000000(1+x)$.

Sau năm thứ hai số dân của thành phố là $2000000(1+x)x$.

Ta có phương trình $2000000(1+x)+2000000(1+x)x=2020050 \Leftrightarrow x=0{,}5$.

Vậy trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng thêm 0,5%. □

VÍ DỤ 2 (Bài 49/tr59-SGK). Hai đội thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 4 ngày xong công việc. Nếu họ làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong công việc?

LỜI GIẢI.

Gọi x là thời gian riêng đội I hoàn thành công việc ($x>0$, đơn vị: ngày).

Do đó, thời gian đội II làm riêng là $x+6$ ngày.

Trong 1 ngày:

— Đội I hoàn thành $\dfrac{1}{x}$ công việc.

— Đội II hoàn thành $\dfrac{1}{x+6}$ công việc.

— Cả hai đội cùng làm thì hoàn thành $\dfrac{1}{4}$ công việc.

Từ đó ta có phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x^2-2x-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\ x=-4\ \text{(loại)}.\end{array}\right.$.

Vậy nếu làm riêng thì đội I hoàn thành công việc trong 6 ngày và đội II hoàn thành trong 12 ngày. □

VÍ DỤ 3. Muốn làm xong công việc cần 480 công thợ. Người ta có thể thuê một trong hai nhóm thợ A hoặc B. Biết nhóm A ít hơn nhóm B là 4 người và nếu giao cho nhóm B thì công việc hoàn thành sớm hơn 10 ngày so với nhóm A. Hỏi số người của mỗi nhóm.

LỜI GIẢI.

Gọi số người của nhóm A là x ($x > 0$, đơn vị: người).

Suy ra, số người của nhóm B là $x + 4$ người.

Với giả thiết:

— Nếu thuê nhóm A thì thời gian hoàn thành công việc là $\dfrac{480}{x}$.

— Nếu thuê nhóm B thì thời gian hoàn thành công việc là $\dfrac{480}{x+4}$.

— Do nhóm B hoàn thành sớm hơn so với nhóm A là 10 ngày nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{480}{x} - 10 = \frac{480}{x+4} \\ \Leftrightarrow\ & 48(x+4) - x(x+4) = 48x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 4x - 192 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -16 \ \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy nhóm A có 12 người và nhóm B có 16 người.

□

Với ví dụ trên, ta có thể gọi x là số người nhóm A và y là số người nhóm B. Sau đó ta thiết lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - x = 4 \\ \dfrac{480}{y} - \dfrac{480}{x} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 16. \end{cases}$$

VÍ DỤ 4 (Bài 42/tr58-SGK). Bác Thời vay 2000000 đồng để làm kinh tế gia đình trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra cuối năm bác phải trả cả vốn lẫn lãi. Song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm một năm nữa, số lãi của năm đầu được gộp vào với vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết hai năm phải trả tất cả là 2420000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm?

LỜI GIẢI.

Gọi x là lãi suất vay ngân hàng trong 1 năm ($x > 0$, đơn vị: %).

Bác Thời vay 2000000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế gia đình trong 1 năm. Do đó tiền lãi của năm thứ nhất là $2000000x$.

Vậy cả tiền vay và tiền lãi phải trả sau năm thứ nhất là

$$2000000 + 2000000x = 2000000(x+1).$$

Số tiền cả vốn lẫn lãi sau năm thứ hai là

$$2000000(x+1) + 2000000(x+1)x = 2000000(x+1)^2.$$

Do đó, ta có phương trình

$$2000000(x+1)^2 = 2420000 \Leftrightarrow x^2 + 2x - \frac{21}{100} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{100} \\ x = -\dfrac{110}{100} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy bác Thời vay vốn với lãi suấ 10%. □

VÍ DỤ 5. Một tổ sản xuất theo kế hoạch phải làm được 720 sản phẩm. Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì so với giảm năng suất đi 20 sản phẩm mỗi ngày thời gian hoàn thành ngắn hơn 4 ngày. Tính năng suất dự định

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi năng suất dự định là x ($x > 0$, đơn vị: sản phẩm/ngày).

Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì thời gian hoàn thành công việc là $\dfrac{720}{x+10}$.

Nếu giảm năng suất đi 20 sản phẩm mỗi ngày thì thời gian hoàn thành công việc là $\dfrac{720}{x-20}$.

Do thời gian chênh lệch là 4 ngày nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{720}{x+10} + 4 = \frac{720}{x-20} \\ \Leftrightarrow\ & 720(x-20) + 4(x+10)(x-20) = 720(x+10) \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 - 40x - 22400 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 80 \\ x = -70 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy năng suất dự định là 80 sản phẩm một ngày. □

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Tìm hai số biết hiệu của chúng bằng 5 và tổng các bình phương của chúng bằng 125.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi 2 số cần tìm là a và b.

Theo đề bài ta có $\begin{cases} a - b = 5 & (1) \\ a^2 + b^2 = 125 & (2). \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow a = 5 + b$, thế vào (2) ta được

$$(5+b)^2 + b^2 = 125 \Leftrightarrow b^2 + 5b - 50 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được

$$\begin{aligned} & b_1 = 5 \Rightarrow a_1 = 10 \\ & b_2 = -10 \Rightarrow a_2 = -5. \end{aligned}$$

Vậy hai số cần tìm là 10 và 5, hoặc -5 và -10. □

BÀI 2. Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 25 và hiệu các bình phương của chúng cũng bằng 25.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi 2 số cần tìm là a và b. Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} a+b=25 \\ a^2-b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=25 \\ (a+b)(a-b)=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=25 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=13 \\ b=12. \end{cases}$$

Vậy hai số cần tìm là 13 và 12. □

BÀI 3. Lúc 7 giờ sáng một ôtô khởi hành từ A để đến B cách A 120 km. Sau khi đi được $\dfrac{2}{3}$ quãng đường ôtô dừng lại 20 phút để nghỉ rồi đi chậm hơn trước 8 km/h. Ôtô đến B lúc 10 giờ. Hỏi ôtô nghỉ lúc mấy giờ?

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi vận tốc ôtô đi trên đoạn đường đầu là x (km/h), $x > 8$.

Vận tốc ôtô đi trên đoạn đường sau là $x - 8$ (km/h).

Thời gian ôtô đi trên đoạn đường đầu là $\dfrac{80}{x}$ (h).

Thời gian ôtô đi trên đoạn đường sau là $\dfrac{40}{x-8}$ (h).

Theo đề bài ta có phương trình $\dfrac{80}{x} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{40}{x-8} = 3$.

Giải phương trình ta được $x_1 = 48$ (nhận) ; $x_2 = 5$ (loại).

Thời gian ôtô đi từ A đến chỗ nghỉ là $\dfrac{80}{48} = \dfrac{5}{3}\text{h} = 1\text{h}40\text{ph}$.

Vậy ôtô nghỉ lúc $7\text{h} + 1\text{h}40\text{ph} = 8\text{h}40\text{ph}$. □

BÀI 4. Một người đi từ A đến B rồi lại trở về A. Lúc về đi được 30 km người đó nghỉ 20 phút. Sau khi nghỉ xong, người đó đi với vận tốc nhanh hơn trước 6 km/h. Tính vận tốc lúc đi. Biết quãng đường AB dài 90 km và thời gian đi bằng thời gian về kể cả nghỉ.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi vận tốc lúc đi là x (km/h), $x > 0$.

Thời gian đi từ A đến B là $\dfrac{90}{x}$.

Thời gian đi về từ B đến A là $\dfrac{30}{x} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{60}{x+6}$.

Vì thời gian đi bằng thời gian về nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x} + \frac{1}{3} + \frac{60}{x+6} = \frac{90}{x}.$$

Giải phương trình ta được nghiệm $x_1 = -36$ (loại) và nghiệm $x_2 = 30$ (nhận).

Vậy vận tốc lúc đi của ô tô là 30 kn/h. □

BÀI 5. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 33 km với vận tốc xác định. Khi từ B về A người đó đi bằng đường khác dài hơn đường trước 29 km nhưng với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi 3 km/h. Tính vận tốc lúc đi. Biết thời giang về nhiều hơn thời gian đi là 1 giờ 30 phút.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi vận tốc lúc đi là x (km/h), ($x > 0$).

Thời gian đi từ A đến B là $\dfrac{33}{x}$.

Thời gian đi về là $\dfrac{62}{x+3}$.
Theo đề bài ta có phương trình

$$\frac{62}{x+3}=\frac{33}{x}+\frac{3}{2}.$$

Giải phương trình ta được nghiệm $x_1=9, x_2=\dfrac{22}{3}$.
Vậy vận tốc xe đạp lúc đi là 9 km/h hoặc $\dfrac{33}{3}$ km/h.

□

BÀI 6. Một ôtô đi từ A đến B rồi quay về A ngay. Sau khi ô tô đi được 15 km thì một người đi xe đạp từ B về A. Tính vận tốc mỗi xe. Biết:
- Quãng đường AB dài 24 km.
- Vận tốc ôtô nhanh hơn xe đạp 37 km/h.
- Ôtô quay trở về A sớm hơn xe đạp đến B là 44 phút.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi vận tốc xe đạp là x (km/h), $(x>0)$.
Từ giả thiết ta có vận tốc của ô tô là $x+37$.
Thời gian của ô tô đi từ A đến B rồi quay về A là $\dfrac{48}{x+37}$.
Thời gian người đi xe đạp từ B về A là $\dfrac{24}{x}$.
Theo giả thiết ta có phương trình

$$\frac{48}{x+37}=\frac{24}{x}+\frac{15}{x+37}-\frac{44}{60}.$$

Giải phương trình ta được nghiệm thoả mãn là $x=18$.
Vậy vận tốc của người đi xe đạp là 18 km/h và của ô tô là 55 km/h. □

BÀI 7. Một ô tô dự định đi quãng đường AB dài 60 km. Trong thời gian nhất định, trên nửa quãng đường AB do đường xấu nên ô tô chỉ đi với vận tốc ít hơn dự định 6 km/h. Để đến B đúng dự định, ô tô phải đi quãng đường còn lại với vận tốc nhanh hơn vận tốc dự định 10 km/h. Tính thời gian dự định đi hết quãng đường.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x là vận tốc dự định đi hết quãng đường AB ($x>0$; đơn vị: km/h).
Thời gian dự định đi hết quãng đường AB là $\dfrac{60}{x}$.
Vận tốc thực tế trên nửa quãng đường đầu AB là $x-6$.
Thời gian thực tế đi nửa quãng đường đầu AB là $\dfrac{30}{x-6}$.
Vận tốc thực tế trên nửa quãng đường AB còn lại là $x+10$.
Thời gian thực tế đi nửa quãng đường AB còn lại là $\dfrac{30}{x+10}$.
Do đó

$$\begin{aligned}
&\frac{30}{x-6}+\frac{30}{x+10}=\frac{60}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+10}=\frac{2}{x}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{2x+4}{(x-6)(x+10)}=\frac{2}{x}\Leftrightarrow x(x+2)=(x-6)(x+10)\\
\Leftrightarrow\ &2x=60\Leftrightarrow x=30\,(\text{thỏa mãn}).
\end{aligned}$$

Thời gian dự định đi hết quãng đường đầu là $t = \dfrac{60}{30} = 2$ giờ. □

BÀI 8. Một tổ lao động hoàn thành đào đắp 8000 m^3 đất trong một thời gian nhất định. Nếu mỗi ngày vượt mức 50 m^3 thì tổ lao động hoàn thành kế hoạch sớm 8 ngày. Tính thời gian dự định.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x là năng suất đào đắp một ngày ($x > 0$; đơn vị: m^3).

Thời gian dự định hoàn thành công việc là $\dfrac{8000}{x}$.

Nếu mỗi ngày vượt mức 50 m^3 thì năng suất mỗi ngày là $x + 50$.

Thời gian làm theo năng suất vượt mức là $\dfrac{8000}{x+50}$.

Vì hoàn thành kế hoạch sớm 8 ngày nên

$$\begin{aligned}
& \frac{8000}{x+50} + 8 = \frac{8000}{x} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1000}{x+50} + 1 = \frac{1000}{x} \Leftrightarrow \frac{x+1050}{x+50} = \frac{1000}{x} \\
\Leftrightarrow\ & x(x+1050) = 1000(x+5) \Leftrightarrow x^2 + 50x - 5000 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 50\,(\text{thỏa mãn}) \\ x = -100\,(\text{loại}). \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Thời gian dự định hoàn thành kế hoạch là $t = \dfrac{8000}{50} = 160$ ngày. □

BÀI 9. Một nông trường phải trồng 75 ha rừng với năng suất đã định từ trước. Nhưng trong thực tế, khi bắt tay vào trồng rừng thì mỗi tuần nông trường trồng thêm được 5 ha so với kế hoạch nên đã trồng được 80 ha. Do vậy, họ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 tuần. Tính năng suất dự định của nông trường.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi x là năng suất dự định mỗi tuần của nông trường ($0 < x < 75$; đơn vị ha).

Thời gian dự định trồng 75 ha rừng là $\dfrac{75}{x}$.

Năng suất thực tế mỗi tuần trồng được là $x + 5$.

Thời gian thực tế hoàn thành việc trồng rừng là $\dfrac{80}{x+5}$.

Vì công việc hoàn thành sớm hơn dự định 1 tuần nên

$$\begin{aligned}
& \frac{80}{x+5} = \frac{75}{x} - 1 \Leftrightarrow \frac{80}{x+5} = \frac{75-x}{x} \\
\Leftrightarrow\ & 80x = (x+5)(75-x) \Leftrightarrow x^2 + 10x - 375 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 15\,(\text{thỏa mãn}) \\ x = -25\,(\text{loại}). \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy năng suất dự định của nông trường là 15 ha. □

BÀI 10. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh khu vườn rộng 2 m. Diện tích còn lại là 4256. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi chiều dài của khu vườn là x ($x > 0$, đơn vị: m).

Gọi chiều rộng của khu vườn là y ($0 < x < y$, đơn vị: m).

Khu vườn có chu vi 280 m nên $2(x+y)=280$. (1)

Người ta làm một lối đi xung quanh khu vườn rộng 2 m do đó:

+ Chiều dài còn lại là $x-4$.

+ Chiều rộng còn lại là $y-4$.

Biết diện tích còn lại là 4256 m^2 nên ta có phương trình $(x-4)(y-4)=4256$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=140 \\ (x-4)(y-4)=4256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=140 \\ xy=4800. \end{cases}$$

Theo định lí Vi-ét x, y là nghiệm của phương trình

$$X^2-140X+4800=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=60 \\ X=80. \end{array}\right.$$

Vậy mảnh vườn có chiều dài bằng 80 m và chiều rộng bằng 60 m. □

BÀI 11. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn nếu cả hai vòi cùng chảy một lúc thì sau 4 giờ mới đầy bể. Nếu từng vòi chảy một thì thời gian vòi I chảy nhanh hơn vòi II là 6 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là x giờ, điều kiện $x>0$.

Suy ra, mỗi giờ vòi I chảy vào bể được $\dfrac{1}{x}$ bể.

Với giả thiết:

— Thời gian vòi II chảy một mình đầy bể là $x+6$, suy ra mỗi giờ vòi II chảy vào được $\dfrac{1}{x+6}$ bể.

— Nếu mở cả hai vòi thì sau 4 giờ mới đầy bể, suy ra mỗi giờ cả hai vòi cùng chảy thì được $\dfrac{1}{4}$ bể.

Từ đó ta có phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow\ & 4(x+6)+4x-x(x+6)=0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-2x-24=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-4\ \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy thời gian để vòi I, vòi II chảy một mình đầy bể lần lượt là 4 giờ và 10 giờ. □

BÀI 12. Hai vòi nước cùng chảy vào bể trong 6 giờ 40 phút thì đầy. Nếu chảy riêng từng vòi một thì mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể. Biết rằng vòi thứ hai chảy lâu hơn vòi thứ nhất 3 giờ.

✍ **LỜI GIẢI.**

Đổi 6 giờ 40 phút $=\dfrac{20}{3}$ giờ.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x giờ, điều kiện $x>0$.

Suy ra, mỗi giờ vòi thứ nhất chảy vào bể được $\dfrac{1}{x}$ bể.

Với giả thiết:

— Thời gian vòi thứ hai chảy riêng đầy bể là $x+3$, suy ra mỗi giờ vòi thứ hai chảy vào được $\dfrac{1}{x+3}$ bể.

— Nếu cả hai vòi cùng chảy thì sau 6 giờ 40 phút mới đầy bể, suy ra mỗi giờ cả hai vòi cùng chảy thì được $\dfrac{3}{20}$ bể.

Từ đó ta có phương trình

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20} \\
\Leftrightarrow\ & 20(x+3)+20x-3x(x+3)=0 \\
\Leftrightarrow\ & 3x^2-31x-60=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-\dfrac{5}{3} \text{ (loại).} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy thời gian để vòi thứ nhất, vòi thứ hai chảy riêng đầy bể lần lượt là 12 giờ và 15 giờ. □

PHẦN

II

HÌNH HỌC

CHƯƠNG 3 GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

BÀI 1 GÓC Ở TÂM - SỐ ĐO CUNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Góc ở tâm đường tròn

Định nghĩa 1. *Góc ở tâm đường tròn là góc mà đỉnh của nó là tâm của đường tròn.*

Mỗi góc ở tâm cắt đường tròn tại hai điểm, do đó xác định hai cung tròn và có thể xảy ra hai trường hợp:

1. Một cung nhỏ và một cung lớn.
2. Hai cung đều bằng nửa đường tròn.

2. Số đo của cung tròn

Định nghĩa 2. số đo của cung AB (kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$) được xác định như sau:

1. Số đo (độ) của cung nhỏ AB bằng số đo (độ) của góc ở tâm chắn cung đó.
2. Số đo (độ) của cung lớn AB bằng 360° trừ đi số đo độ cung nhỏ AB.
3. Số đo (độ) của nửa đường tròn bằng 180°.

Định nghĩa 3. Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

1. Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo (độ).
2. Trong hai cung không bằng nhau, cung lớn hơn là cung có số đo (độ) lớn hơn.

3. Điểm nằm trên cung tròn

Định lí 1. *Nếu điểm C nằm trên cung AB và chia cung này thành hai cung kí hiệu là $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$ thì ta có sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{CB}$.*

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau:

a) 3 giờ. b) 5 giờ. c) 6 giờ. d) 12 giờ. e) 20 giờ.

✍ **LỜI GIẢI.**

a) 90°. b) $\dfrac{360}{12}\cdot 5 = 150^\circ$. c) 180°. d) 0°. e) $\dfrac{360}{12}\cdot 4 = 120^\circ$.

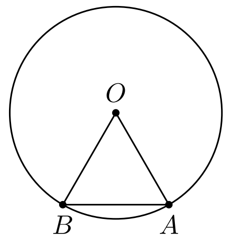
□

VÍ DỤ 2. Cho đường tròn $(O;R)$, dây $AB = R$. Tính số đo hai cung $\overset{\frown}{AB}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét $\triangle OAB$ có

$$OA = OB = AB = R \Leftrightarrow \triangle OAB \text{ đều} \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$$



Từ đó ta được

— Số đo (độ) của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ bằng 60°.

— Số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ bằng $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

□

VÍ DỤ 3. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M. Biết $\widehat{AMB} = 35^\circ$.

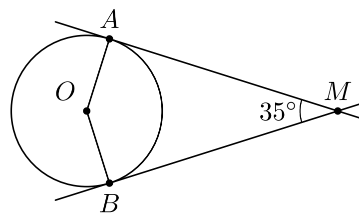
❶ Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB.

❷ Tính số đo mỗi cung $\overset{\frown}{AB}$ (cung lớn và cung nhỏ).

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $\widehat{AOB} + \widehat{OBM} + \widehat{BMA} + \widehat{MAO} = 360^\circ$.
Do đó $\widehat{AOB} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 145^\circ$.

❷ Ta có sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{nhỏ}} = 145^\circ$; sđ$\overset{\frown}{AB}_{\text{lớn}} = 360^\circ - 145^\circ = 215^\circ$.

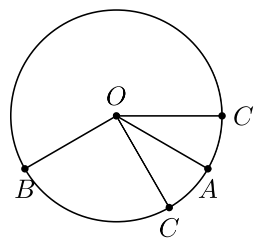


□

VÍ DỤ 4. Cho đường tròn (O), góc ở tâm $\widehat{AOB} = 120^\circ$, góc ở tâm $\widehat{AOC} = 30^\circ$. Tính số đo cung $\overset{\frown}{BC}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có hai trường hợp:



Trường hợp 1. Điểm C nằm trên cung lớn AB.

Khi đó sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\overset{\frown}{AB}$ + sđ$\overset{\frown}{AC} = 120^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Trường hợp 2. Điểm C nằm trên cung nhỏ AB.

Khi đó sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\overset{\frown}{AB}$ − sđ$\overset{\frown}{AC} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

Nhận xét: *Nhiều em học sinh khi thực hiện ví dụ trên chỉ xét một trong hai trường hợp, để tránh mắc phải những thiếu sót kiểu này cần học thuộc thật kỹ định nghĩa về góc ở tâm.*

□

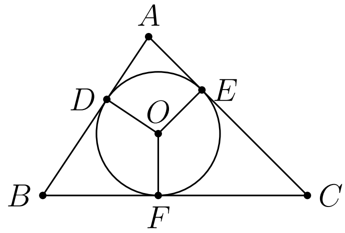
VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác với AB, AC, BC theo thứ tự ở D, E, F.

❶ Tính số đo cung nhỏ và cung lớn $\overset{\frown}{DE}$.

❷ Tính số đo cung nhỏ và cung lớn EF.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶



Xét tứ giác $ADOE$, ta có

$$\begin{aligned}\widehat{DOE} &= 360^\circ - \widehat{A} - \widehat{D} - \widehat{E}\\ &= 360^\circ - \alpha - 90^\circ - 90^\circ\\ &= 180^\circ - \alpha.\end{aligned}$$

Vậy ta được:

— Số đo (độ) của cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$ bằng $180^\circ - \alpha$.

— Số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{DE}$ bằng $360^\circ - (180^\circ - \alpha) = 180^\circ + \alpha$.

❷ Trong $\triangle ABC$, ta có $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - \alpha - \beta$.

Xét tứ giác $CEOF$ có

$$\widehat{EOF} = 360^\circ - \widehat{C} - \widehat{F} - \widehat{E} = 360^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - 90^\circ - 90^\circ = \alpha + \beta.$$

Vậy ta được:

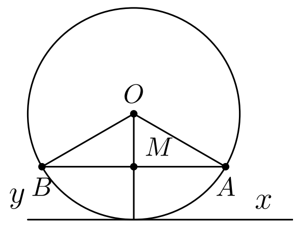
— Số đo (độ) của cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$ bằng $\alpha + \beta$.

— Số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{EF}$ bằng $360^\circ - (\alpha + \beta)$.

□

VÍ DỤ 6. Chứng minh rằng nếu một tiếp tuyến song song với một dây thì tiếp điểm chia đôi cung căng dây.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi I là tiếp điểm, nối OI cắt AB tại M, ta có

$$OI \perp xy \quad \text{(tính chất của tiếp tuyến)}$$

Mặt khác $AB \parallel xy \Rightarrow OI \perp AB$, suy ra

$$IA = IB \quad \text{(tính chất đường kính vuông góc với một dây)}.$$

Nhận xét: *Ví dụ trên là một trường hợp đặc biệt của định lý hai cung chắn giữa hai dây song song.*

□

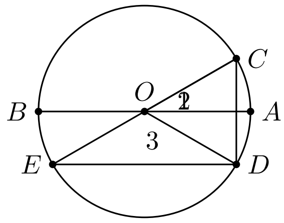
VÍ DỤ 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AC có số đo nhỏ hơn 90°. Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB. Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$.

b) Ba điểm C, O, E thẳng hàng.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶



Ta có AB vuông góc với CD nên

$$AC = AD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} \qquad (1)$$

Ta có AB song song với DE nên

$$AD = BE \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$.

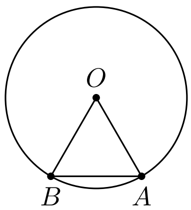
❷ Ta có $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 180^\circ$ (hai góc kề bù); $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (vì $AC = BE < 180^\circ$).
Suy ra $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 180^\circ \Rightarrow C$, O, E thẳng hàng.

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho đường tròn tâm $(O; R)$, dây $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo hai cung $\overset{\frown}{AB}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét $\triangle OAB$ ta có

$$OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = AB^2$$

Suy ra $\triangle OAB$ vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$.

Từ đó ta được

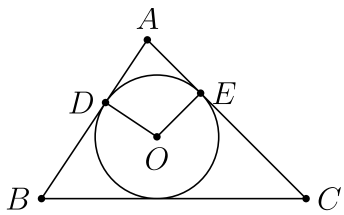
— Số đo (độ) của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ bằng 90°.

— Số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ bằng $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

□

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 70^\circ$. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự ở D, E. Tính số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét tứ giác $ADOE$, ta có

$$\begin{aligned}\widehat{DOE} &= 360^\circ - \widehat{A} - \widehat{D} - \widehat{E}\\ &= 360^\circ - 70^\circ - 90^\circ = 110^\circ.\end{aligned}$$

Vậy, số đo (độ) của cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$ bằng 110°.

□

BÀI 3. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AM và AN, chúng tạo với nhau một góc α.

❶ Tính số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{MN}$.

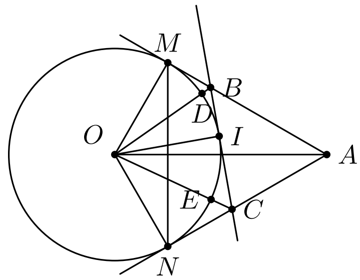
❷ Từ một điểm I trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$, vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt AM và AN lần lượt tại B và C. Tia OB và OC cắt đường tròn lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng số đo của cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$ có giá trị không đổi khi điểm I chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Xét tứ giác $AMON$ ta có

$$\begin{aligned}\widehat{MON} &= 360^\circ - \widehat{A} - \widehat{M} - \widehat{N}\\ &= 360^\circ - \alpha - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ - \alpha\end{aligned}$$



Khi đó, số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{MN}$ bằng

$$360^\circ - (180^\circ - \alpha) = 180^\circ + \alpha$$

❷ Nhận xét rằng

— BM và BI là hai tiếp tuyến nên $\widehat{BOM} = \widehat{BOI} \Rightarrow \widehat{BOI} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOI}$.

— CN và CI là hai tiếp tuyến nên $\widehat{CON} = \widehat{COI} \Rightarrow \widehat{COI} = \dfrac{1}{2}\widehat{NOI}$

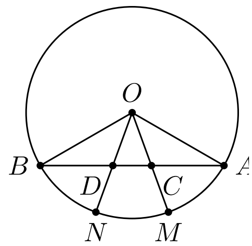
Khi đó

$$\begin{aligned}\widehat{DOE} &= \widehat{BOI} + \widehat{COI} = \frac{1}{2}\widehat{MOI} + \frac{1}{2}\widehat{NOI} = \frac{1}{2}\left(\widehat{MOI} + \widehat{NOI}\right)\\ &= \frac{1}{2}\widehat{MON} = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \quad \text{có giá trị không đổi.}\end{aligned}$$

□

BÀI 4. Cho đường tròn (O) và dây AB. Lấy hai điểm M và N nằm trên cung nhỏ AB chia cung này thành ba cung bằng nhau $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NB}$. Các bán kính OM và ON cắt AB tại C và D. Chứng minh rằng $AC = BD$ và $AC > CD$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét hai tam giác $\triangle OAC$ và $\triangle OBD$, ta có $\widehat{AOC} = \widehat{AOD}$, vì $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{NB}$ nên

$OA = OB$, bán kính đường tròn

$\widehat{AOC} = \widehat{OBD}$, vì $\triangle OAD$ cân tại O.

Do đó $\triangle OAC = \triangle OBD \Rightarrow AC = BD$, đpcm.

❷ Trong $\triangle OAD$ có OC là tia phân giác, do đó

$$\frac{AC}{CD} = \frac{OA}{OD} > \frac{OA}{ON} = 1 \Rightarrow AC > CD, \quad \text{đpcm}$$

□

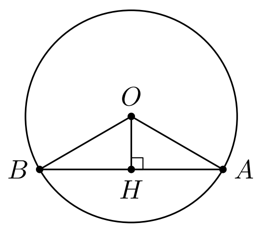
BÀI 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và một dây AB sao cho số đo của cung lớn AB gấp đôi cung nhỏ AB. Tính diện tích $\triangle ABC$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Với giả thiết *"Số đo của cung lớn AB gấp đôi cung nhỏ AB"*, suy ra $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

Hạ OH vuông góc với AB.

Xét $\triangle OAH$ vuông tại H, ta có



$$\widehat{AOH} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{OAH} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Khi đó $OH = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{R}{2}$

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Xét $\triangle OAB$ ta có

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OH \cdot AB = \frac{1}{2}OH \cdot 2AH = \frac{R}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{4}.$$

□

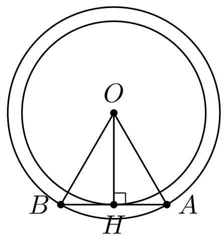
BÀI 6. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $\left(O; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Tiếp tuyến của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tính số đo của hai cung $\widehat{AB}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Nhận xét rằng, trong $\triangle OAB$ cân tại O có $OA = OB = R$ và đường cao $OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\triangle OAB$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$.

Khi đó



— Số đo cung nhỏ $\widehat{AB} = 60^\circ$.
— Số đo cung lớn $\widehat{AB}$ bằng $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

□

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$. Gọi O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C.

❶ Tính số đo các góc ở tâm tạo bởi hai trong trong ba bán kính OA, OB, OC.

❷ Tính số đo các cung tạo bởi hai trong ba điểm A, B, C.

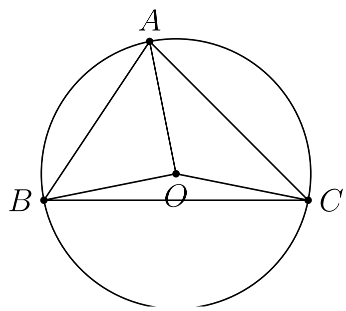
✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $\widehat{AOB} = 180^\circ - (\widehat{AOB} + \widehat{OBA}) = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$.
$\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 120^\circ$.

❷

Ta có

— sđ$\widehat{AB}_{\text{nhỏ}} = 120^\circ$; sđ$\widehat{AB}_{\text{lớn}} = 240^\circ$.
— sđ$\widehat{AC}_{\text{nhỏ}} = 120^\circ$; sđ$\widehat{AC}_{\text{lớn}} = 240^\circ$.
— sđ$\widehat{BC}_{\text{nhỏ}} = 120^\circ$; sđ$\widehat{BC}_{\text{lớn}} = 240^\circ$.



□

BÀI 2 LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn:

❶ Hai cung bằng nhau khi và chỉ khi chúng căng hai dây bằng nhau.

❷ Cung lớn hơn khi và chỉ khi nó căng dây lớn hơn.

Trong đường tròn (O), ta có minh họa:

— $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COD}$.
— $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB > CD \Leftrightarrow \widehat{AOB} > \widehat{COD}$.

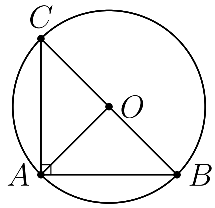
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.
b) $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{BC}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét $\triangle ABC$ vuông cân tại A, ta có ngay:
— $AB = AC$ (hai cạnh bên của tam giác cân) $\Leftarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.
— $AB < BC$ (cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền) $\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{BC}$.



Chú ý:

❶ Giữa đường kính với dây và cung căng dây có sự liên hệ như "Đường kính vuông góc với dây thì":
— Đường kính đi qua trung điểm của dây.
— Đường kính đi qua điểm chính giữa của cung.

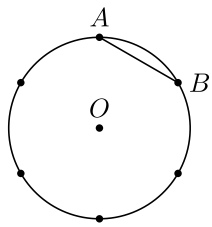
❷ Hai cung chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

□

VÍ DỤ 2.

❶ Vẽ đường tròn tâm (O), bán kính $R = 2$ cm. Nêu cách vẽ cung $\overset{\frown}{AB}$ có số đo bằng 60°. Hỏi dây AB dài bao nhiêu xen-ti-mét?

❷ Làm thế nào để chia được đường tròn thành sáu cung bằng nhau như trên hình bên.



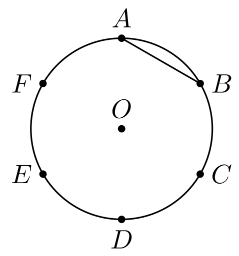
✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Cách vẽ:
— Lấy điểm A tùy ý trên đường tròn.
— Vẽ đường tròn tâm A, bán kính $OA = 2$ cm.
— Đường tròn (A) cắt (O) tại B.
— Cung $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$ cần dựng và $AB = 2$ cm.

Chứng minh:
Đường tròn tâm A, bán kính $OA = 2$ cm cắt (O) tại $B \Rightarrow OA = AB$.
Ngoài ra ta có $OA = OB$.
Vậy, $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$.

❷

Để chia hình tròn $(O;R)$ thành 6 cung bằng nhau. Ta thực hiện theo các bước sau:



— Từ điểm A bất kì trên đường tròn $(O;R)$, vẽ đường tròn $(A;R)$ cắt (O) tại B.
— Từ điểm B vừa vẽ, vẽ đường tròn $(B;R)$ cắt (O) tại C.
— Từ điểm C vừa vẽ, vẽ đường tròn $(C;R)$ cắt (O) tại D.
— Từ điểm D vừa vẽ, vẽ đường tròn $(D;R)$ cắt (O) tại E.
— Từ điểm E vừa vẽ, vẽ đường tròn $(E;R)$ cắt (O) tại F.

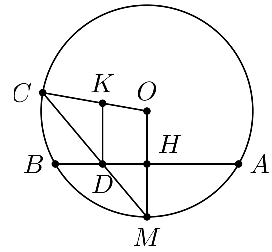
Vậy các điểm A, B, C, D, E, F chia đường tròn thành 6 cung bằng nhau.

□

VÍ DỤ 3. Cho đường tròn (O), dây AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung AB. Vẽ dây MC cắt dây AB tại D. Vẽ đường vuông góc với AB tại D, cắt OC ở K. Chứng minh rằng $\triangle KCD$ là tam giác cân.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì M là điểm chính giữa của cung AB nên



$$OM \perp AB \Rightarrow OM \parallel KD$$

Suy ra $\widehat{KDC} = \widehat{OMC} = \widehat{OCM} \Leftrightarrow \triangle KCD$ là tam giác cân.

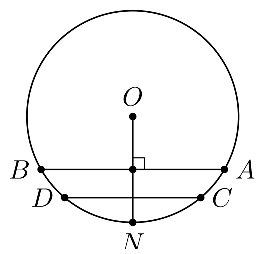
Nhận xét: *Như vậy, ví dụ trên đã minh họa cho chúng ta thấy việc sử dụng tính chất đường kính vuông góc với một dây để giải toán. Ví dụ tiếp theo sẽ minh họa sử dụng việc sử dụng tính chất "Hai cung chắn giữa hai dây song song".*

□

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng hai cung chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

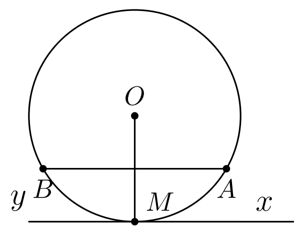
Xét hai dây song song AB và CD, kẻ bán kính $ON \perp AB$, khi đó vì:



$$AB \parallel CD \Rightarrow ON \perp CD$$

Do tính đối xứng trục $\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NB}$ và $\overset{\frown}{NC} = \overset{\frown}{ND}$.
Suy ra $\overset{\frown}{NA} - \overset{\frown}{NC} = \overset{\frown}{NB} - \overset{\frown}{ND} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

Nhận xét: *Mở rộng, chúng ta có thêm tính chất: "Tiếp tuyến song song với một dây thì tiếp điểm chia đôi cung căng dây".*
Tức là, theo hình vẽ ta có:



$$xy \parallel AB \Rightarrow AM = BM \Leftrightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$$

□

VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH của tam giác cắt đường tròn ở D. Vẽ đường kính AE.

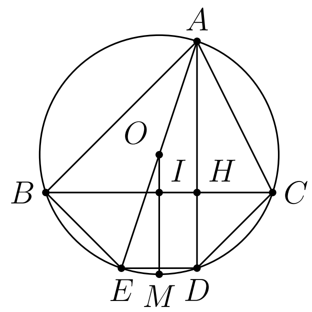
❶ Chứng minh rằng $BECD$ là hình thang cân.

❷ Gọi M là điểm chính giữa của cung DE, OM cắt BC tại I. Chứng minh rằng I là trung điểm của BC.

❸ Tính bán kính của đường tròn biết $BC = 24$ cm, $IM = 8$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶



Ta có $AD \perp BC$ (giả thiết)

$AD \perp DE$ (vì AE là đường kính).

Suy ra $BC \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CD}$ (hai cung chắn giữa hai dây song song)

Suy ra $BE = CD$ (liên hệ giữa cung và dây).

Mặt khác ta có

$$\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{ED} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow BD = CE.$$

Vậy, $BEDC$ là hình thang cân.

❷ Ta có $\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EM} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DM} \Rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC}$.

Suy ra $IB = IC$ (đường kính đi qua điểm chính giữa của cung).

❸ Ta có $BI = IC \Rightarrow OI \perp BC$ (đường kính đi qua trung điểm của dây).

Đặt $OC = OM = R$, xét $\triangle OIC$ vuông ta có

$$OC^2 = OI^2 + IC^2 \Leftrightarrow R^2 = (R-8)^2 + 12^2$$

Suy ra $R^2 = R^2 - 16R + 64 + 144 \Rightarrow 16R = 208 \Rightarrow R = 13$ cm.

Nhận xét:

— *Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau chưa đủ là hình thang cân. Do đó không thể chứng minh $BDEC$ là hình thang cân bằng cách chứng minh $BD = CE$ để suy ra $BD = CE$.*

— *Câu c) là một bài toán thực tế: "Biết độ dài dây BC và khoảng cách IM từ trung điểm dây đến điểm chính giữa cung bị chắn, ta tìm được bán kính của đường tròn".*

□

VÍ DỤ 6. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Kẻ các đường kính AC, của đường tròn (O) và đường kính AD của đường tròn (O'). Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O').

❶ So sánh các cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ và $\overset{\frown}{BD}$.

❷ Chứng minh rằng B là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{EBD}$ (tức là điểm B chia cung $\overset{\frown}{EBD}$ thành hai cung bằng nhau $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BD}$).

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Tứ giác $AOBO'$ là hình thoi do $AO = OB = O'A = O'B$.

Do đó $\widehat{AOB} = \widehat{AO'B}$. Suy ra $\widehat{BOC} = \widehat{BO'D} \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\overset{\frown}{BD}$.

Do (O) và (O') là các đường tròn bằng nhau và sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\overset{\frown}{BD}$ nên $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.

❷

Gọi I là giao điểm của $O'B$ và DE.

Lại có, $OA \parallel O'B$

Theo định lý Ta-lét, ta có $\dfrac{DI}{DE} = \dfrac{DO'}{DA} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra, I là trung điểm của DE.

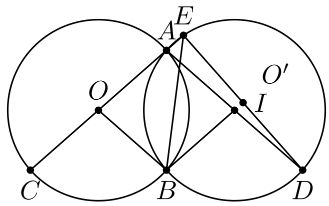
Mặt khác $\triangle EAD$ vuông tại E (vì $EO' = O'A = O'D$)

Suy ra $DE \perp AO \Rightarrow DE \perp BO'$ (vì $AO \parallel BO'$).

Xét $\triangle BED$ có

BI vừa là đường cao vừa là trung tuyến $\Rightarrow \triangle BED$ là tam giác cân đỉnh B.

Do đó $BD = BE \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BE}$ hay B là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{EBD}$.



□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$. Biết $AB < AD$, chứng minh rằng $BC > CD$.

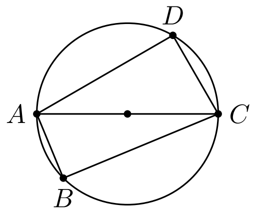
✍ LỜI GIẢI.

Với giả thiết $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$, suy ra

$ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC.

Ta có $AB < AD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AD} \Leftrightarrow -\overset{\frown}{AB} > -\overset{\frown}{AD}$.

$\Leftrightarrow 180^\circ - \overset{\frown}{AB} > 180^\circ - \overset{\frown}{AD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow BC > CD$ (đpcm).



□

BÀI 2. Hai đường tròn (O) và (O') cùng bán kính cắt nhau tại M và N.

1. Chứng minh rằng hai cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ của hai đường tròn bằng nhau.
2. Vẽ các đường kính MA của đường tròn (O) và đường kính MB của đường tròn (O'). Chứng minh rằng $\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NB}$.
3. Vẽ đường kính NOC. Tia BM cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng các cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$, $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CD}$ bằng nhau.

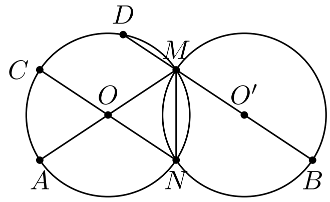
✍ LỜI GIẢI.

1. Vì MN là dây cung chung của hai đường tròn bằng nhau nên hai cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ của hai đường tròn bằng nhau.
2. Ta có $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$, vì hai đường tròn bằng nhau

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MB} - \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NB} \quad \text{(đpcm)}.$$

3.

Tứ giác $ACMN$ là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, nên



$$CM \parallel AN \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{MN} \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có A, N, B thẳng hàng và $AN = BN$.
Suy ra ON là đường trung bình của $\triangle ABD$ do đó

$$CN \parallel DM \Rightarrow \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{CD}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD}$ (đpcm).

□

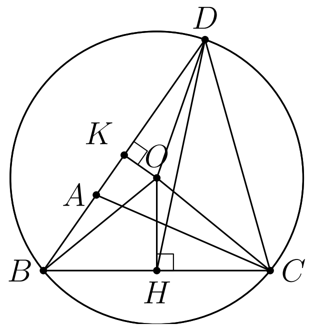
BÀI 3. Cho $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle DBC$. Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc với OH, OK với BC và BD ($H \in BC$, $K \in BD$).

❶ Chứng minh rằng $OH > OK$.
❷ So sánh hai cung nhỏ $\overset{\frown}{BD}$ và $\overset{\frown}{BC}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Xét $\triangle OBD$ và $\triangle OBC$ cân tại đỉnh O có các đường cao kẻ từ đỉnh theo thứ tự là OK và OH nên chúng đồng thời là các trung tuyến.
Do đó $KD = \dfrac{1}{2}BD$; $HC = \dfrac{1}{2}BC$.
Mặt khác, trong $\triangle DBC$ có $BD = BA + AD = BA + AC > BC$.
Suy ra $KD > HC$.
Xét $\triangle OKD$ và $\triangle OHC$ vuông ta có:



$$OK = \sqrt{OD^2 - KD^2} = \sqrt{OC^2 - KD^2} < \sqrt{OC^2 - HC^2} = OH.$$

Vậy, ta luôn có $OK < OH$.

❷ Ta có $BD > BC \Rightarrow \overset{\frown}{BD} > \overset{\frown}{BC}$.

□

BÀI 4. Trên dây cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O) lấy hai điểm C và D sao cho $AC = CD = DB$. Các bán kính qua C và qua D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF} < \overset{\frown}{EF}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

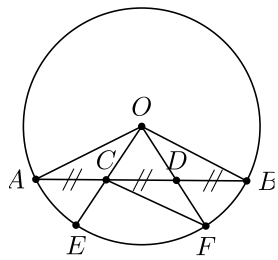
❶ Tam giác cân AOB có $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.
Mặt khác, $\triangle AOC = \triangle BOD$ (c.g.c) vì có $OA = OB$, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$, $AC = BD$. Từ đó suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ suy ra $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{FB}$.

❷

Tam giác OCD là tam giác cân ($OC = OD$ do $\triangle AOC = \triangle BOD$) nên $\widehat{ODC} < 90°$, từ đó suy ra $\widehat{CDF} > 90°$.

Mặt khác, trong tam giác CDF có $\widehat{CDF} > \widehat{CFD}$ suy ra $CF > CD$ hay $CF > CA$.

Xét $\triangle AOC$ và $\triangle COF$ có $OA = OF$, OC chung, nhưng $CF > AC$ suy ra $\widehat{COD} > \widehat{AOC}$. Từ đó suy ra $\widehat{EF} > \widehat{AE}$.



□

BÀI 5.

❶ Chứng minh rằng đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy. Mệnh đề đảo có đúng không? Hãy nêu thêm điều kiện để mệnh đề đảo đúng.

❷ Chứng minh rằng đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Giả sử đường kính CD của đường tròn (O) có C là điểm chính giữa của cung AB.

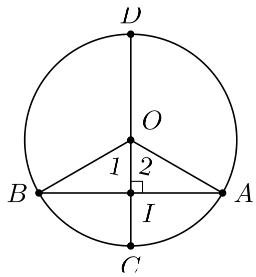
Nghĩa là $AC = CB$. Suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

Gọi I là giao điểm của CD và AB, ta có

OI vừa là tia phân giác vừa là trung tuyến của $\triangle OAB$.

Vậy, I là trung điểm của AB.

Mệnh đề đảo không đúng, ta cần bổ sung thêm "Đường kính đi qua trung điểm một dây không đi qua tâm của đường tròn thì nó vuông góc với dây đó".



❷ Đường kính CD đi qua C là điểm chính giữa cung AB nên $AC = CB$.

Suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{COB} \Rightarrow OC$ là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$

Vì $\triangle OAB$ cân tại O nên đường phân giác đồng thời là đường cao.

Vậy, ta có $OC \perp AB \Leftrightarrow CD \perp AB$.

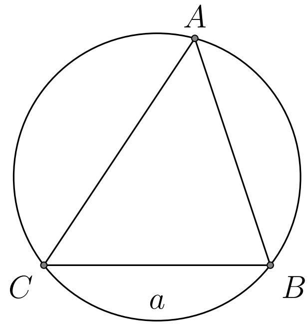
□

BÀI 3 GÓC NỘI TIẾP

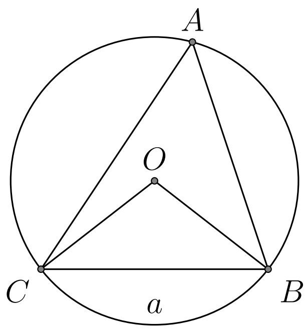
A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định nghĩa 1. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên một đường tròn và hai cạnh của nó cắt đường tròn.

Trong hình mình họa bên, ta thấy $\widehat{ABC}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{AbC}$ (viết tắt là $\widehat{AC}$ và được hiểu là cung $\widehat{AC}$ không chứa điểm B).
$\widehat{BCA}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{BA}$.
$\widehat{CAB}$ là góc nội tiếp chắn cung $\widehat{CB}$.



Định lí 1. *Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.*

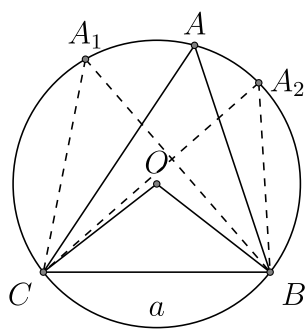


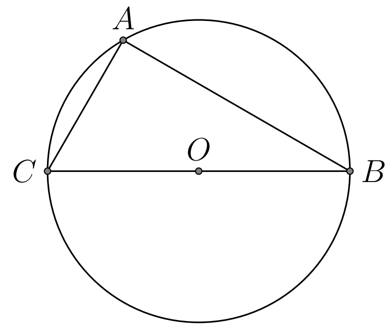
Ta có minh họa $\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}s\text{đ}\widehat{AC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC}$.

Hệ quả 1. Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc hai cung bằng nhau của một đường tròn thì bằng nhau.

Ta có minh học với các điểm A, A_1, A_1 ở cùng một phía với BC.

$$\begin{aligned}\widehat{BAC} &= \widehat{BA_1C} = \widehat{BA_2C} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC}\\ \widehat{AEB} &= \widehat{CFD} \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow AB = CD.\end{aligned}$$





Hệ quả 2. Góc nội tiếp chắc nửa đường tròn là góc vuông.
Ta có minh họa:

$$\widehat{BAC} = 90^\circ$$

BC là đường kính ($O \in BC$).

Hệ quả 3. Trong một đường tròn, mọi góc nội tiếp không quá 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
Ta có minh họa sau

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}.$$

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Giải bài toán định lượng

Phương pháp giải: Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng

VÍ DỤ 1 (Bài 17/tr 75-Sgk). Muốn xác định tâm của một đường tròn mà chỉ dùng êke thì phải làm như thế nào?

LỜI GIẢI.
Để xác định tâm của một đường tròn mà chỉ dùng êke, ta thực hiện theo các bước sau:
Bước 1: Kẻ đường thẳng cắt đường tròn tại A và B.
Bước 2: Qua B, dùng êke kẻ đường thẳng vuông góc với AB ở B và cắt đường tròn tại C.
Bước 3: Nối C với A.
Bước 4: Qua A, dùng êke kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại A và cắt đường tròn tại D.
Bước 5: Nối B với D. Giao điểm của AC và BD là tâm của đường tròn.

□

VÍ DỤ 2. Dựng một tam giác vuông, biết cạnh huyền dài 4 cm và một cạnh góc vuông dài 2,5 cm.

LỜI GIẢI.
Giả sử dựng được $\triangle ABC$ vuông có cạnh huyền $BC = 4$ cm, cạnh góc vuông $AB = 2{,}5$ cm.
Gọi O là trung điểm của BC. Ta có: $OB = OC = OA = 2$ cm.
Vậy $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC có cạnh $AB = 2{,}5$ cm.
Cách dựng: Ta thực hiện theo các bước sau:
Bước 1: Dựng đường tròn bán kính $r = 2$ cm.
Bước 2: Qua O kẻ đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm B và C.
Bước 3: Dựng đường tròn tâm B, bán kính 2,5 cm và cắt đường tròn (O) tại A_1 và A_2.
Vậy $\triangle A_1BC$ va A_2BC thỏa mãn đề bài.

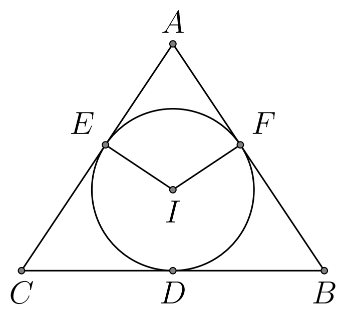
⚠ *Tại bước 3, ta cũng có thể dựng đường tròn tâm C, bán kính 2,5 cm và cắt đường tròn (O) tại A_3 và A_4.*

□

VÍ DỤ 3. Cho $\triangle ABC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC, AC, BA theo thứ tự tại D, E, F. Cho biết $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$. Tính số đo của góc $\widehat{BAC}$.

LỜI GIẢI.

Ta có $\widehat{EDF} = \dfrac{1}{2}\widehat{EIF}$, góc nội tiếp và góc ở tâm.



$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{EIF} \Leftrightarrow \widehat{EIF} = 2\widehat{BAC}.$$

Xét tứ giác $AEIF$, ta có:

$$\begin{aligned}
&\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90^\circ, \text{ vì } (I) \text{ tiếp xúc với } AB, AC\\
&\widehat{BAC} + \widehat{AEI} + \widehat{EIF} + \widehat{AFI} = 360^\circ\\
&\Leftrightarrow \widehat{BAC} + 90^\circ + 2\widehat{BAC} + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ.
\end{aligned}$$

Nhận xét. *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã sử dụng các kết quả để giải nó, cụ thể*

— *Mối liên hệ giữa góc nội tiếp với góc ở tâm.*

— *Tính chất của đường tròn nội tiếp tam giác.*

— *Tổng các góc trong một tứ giác.*

□

DẠNG 2. Giải bài toán định tính

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 4 (Bài 19/tr 75-Sgk). Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH vuông góc với AB.

LỜI GIẢI.

Ta có $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên:

$$\widehat{BMA} = \widehat{ANB} = 90^\circ.$$

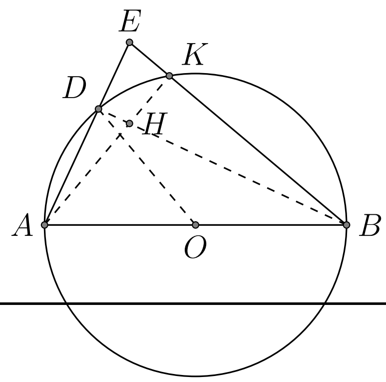
Do đó, $BM \perp AS$, $AN \perp SB \Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle SAB$.

Vậy, ta được $AH \perp AB$. □

VÍ DỤ 5.

Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D. Gọi K là giao điểm của EB với đường tròn (O) và H là giao điểm của BD và AK.

1. $\triangle ABE$ là tam giác gì?
2. Chứng minh rằng EH vuông góc với AB.
3. Chứng minh rằng OD vuông góc với AK.



✍ **LỜI GIẢI.**

— Xét $\triangle ABE$, ta có:
$\widehat{ADB} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Leftrightarrow BD \perp AE$. (1)
tức là BD là trung tuyến vừa là đường cao, do đó $\triangle ABE$ cân tại B.

— Ta có ngay $\widehat{AKB} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Leftrightarrow AK \perp BE$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm $\triangle ABE$, do đó $BE \perp AB$.

— Nhận xét rằng OD là đường trung bình của $\triangle ABE$, do đó: $OD \parallel BE \Leftrightarrow OD \perp AK$, đpcm.

Nhận xét. *Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã sử dụng các kết quả về số đo của góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.*

□

VÍ DỤ 6. Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Chứng minh rằng ta luôn có: $MA^2 = MB \cdot MC$.

✍ **LỜI GIẢI.**

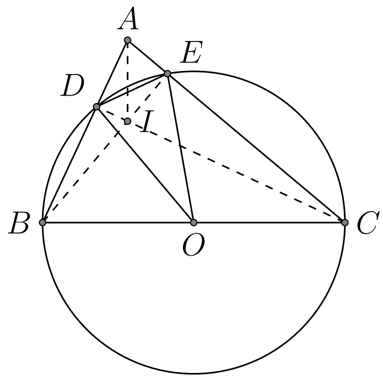
Ta có $CA \perp AB$ (tính chất của hai tiếp tuyến).
Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A.
Mặt khác, $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắc nửa đường tròn) nên AM là đương cao của $\triangle ABC$.
Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có $MA^2 = MB \cdot MC$- đpcm. □

VÍ DỤ 7. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Đường tròn (O) có đường kính BC cắt AB, AC tại D, E. Gọi I là giao điểm của BE và CD.

1. Chứng minh rằng $AI \perp BC$.
2. Chứng minh rằng $\widehat{IAE} = \widehat{IDE}$.
3. Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$, chứng minh $\triangle DOE$ là tam giác đều.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Ta có $\widehat{BDC} = \widehat{BEC}$- vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.
$\Rightarrow BE, CD$ là đường cao của $\triangle ABC$.
$\Rightarrow I$ là trực tâm của $\triangle ABC \Rightarrow AI \perp BC$.
2.



Ta có thể chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$\widehat{IAE} = \widehat{CBE}$- vì góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc $CB \perp IA, BE \perp AE$.

$\widehat{IDE} = \widehat{CBE}$-vì góc nội tiếp chắn cung $CE \Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{IDE}$.

Cách 2: Ta có $\widehat{ADI} = \widehat{AEI} = 90^\circ \Rightarrow D, E$ thuộc đường tròn có đường kính IA.

Khi đó, các góc $\widehat{IAE}$ và $\widehat{IDE}$ là góc nội tiếp chắn cung IE của đường tròn nên $\widehat{IAE} = \widehat{IDE}$.

❸ Trong $\triangle ACD$ vuông tại D có $\widehat{A} = 60^\circ$, ta suy ra: $\widehat{ACD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{DOE} = 2\widehat{ACD} = 60^\circ$.

Khi đó, $\triangle DOE$ có $\widehat{DOE} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

□

VÍ DỤ 8 (Bài 26/tr 76-Sgk). Cho AB, BC, CA là ba dây của đường tròn (O). Từ điểm chính giữa M của cung AB vẽ dây MN song song với dây BC. Gọi giao điểm của MN và AC là S. Chứng minh rằng $SM = SC$ và $SN = SA$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Nối AM và NC. Xét $\triangle AMS$ và $\triangle NSC$, ta có:

$$\widehat{MAS} = \widehat{CNS}(\text{góc nội tiếp cùng chắn cung } MBC)$$
$$\widehat{AMS} = \widehat{NCS}(\text{góc nội tiếp cùng chắn cung } AN)$$

Lại có

$$MB = MA(M \text{ là đỉnh chính giữa cung } AB)$$
$$MB = MC(\text{hai cung chắn giữa hai dây song song}).$$

Suy ra cung $AM = NC \Rightarrow MA = CN$.

Vậy, ta có $\triangle AMS = \triangle NCS$(g.c.g)$\Rightarrow SM = SC, SN = SA$. □

VÍ DỤ 9. Cho đường tròn (O) và (O') bằng nhau, cắt nhau tại A và B. Qua B vẽ một cát tuyến cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D.

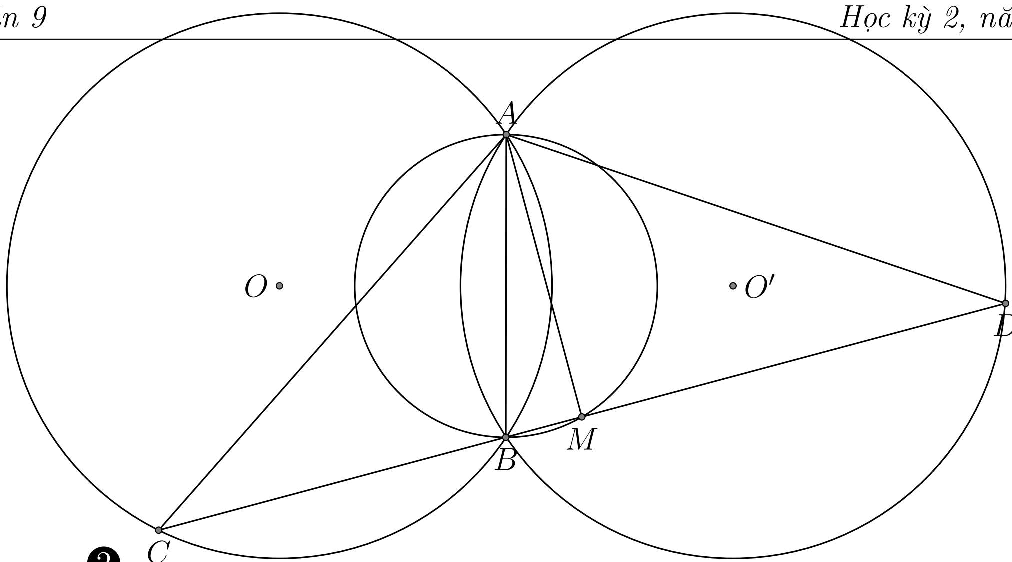
❶ Chứng minh $AC = AD$.

❷ Tìm quỹ tích trung điểm M của CD khi cát tuyến CBD quay quanh B.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Từ giả thiết "hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau", nên hai cung nhỏ AB của chúng bằng nhau, do đó:

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} \Leftrightarrow \triangle ACD$ cân tại $A \Leftrightarrow AC = AD$,ddpcm.



❷ Ta lần lượt thực hiện:

Phần thuận: Với M là trung điểm của CD, suy ra: $AM \perp CD$, vì $\triangle ACD$ cân tại $A \Leftrightarrow \widehat{AMB} = 90° \Leftrightarrow M \in AB$.

Vậy, điểm M thuộc đường tròn đường kính (AB).

Phần đảo: Lấy điểm $M \in (AB)$ và giả sử đường thẳng BM cắt (O) và (O') theo thứ tự tại C và D, ta cần đi chứng minh M là trung điểm của CD.

Thật vậy, trong $\triangle ACD$ cân tại A,ta có:

$\widehat{AMB} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Leftrightarrow AM \perp CD \Rightarrow CM = DM$, vì tam giác cân đường cao là trung tuyến.

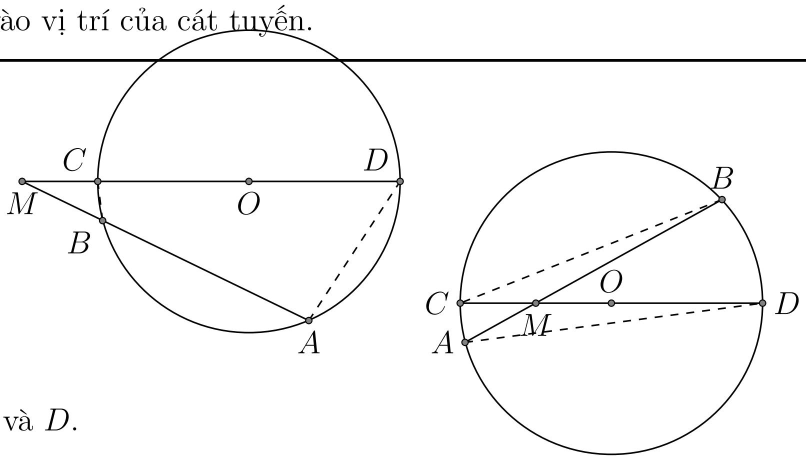
Kết luận: Quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính AB.

Nhận xét. *Với các định lí về góc nội tiếp, góc ở tâm, khả năng chứng minh các góc bằng nhau và tính số đo của góc được tăng thêm nhiều.*

□

VÍ DỤ 10 (Bài 23/tr 76-Sgk). Cho một đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M vẽ một cát tuyến cắt đường tròn ở A và B. Chứng minh rằng tích $MA \cdot MB$ không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến.

✍ **LỜI GIẢI.**



Nối MO cắt (O) ở C và D.

Ta có hai trường hợp:

— **Trường hợp 1**:Hai tam giác $\triangle AMD$ và $\triangle CMB$ có:

$\widehat{M}$ chung

$\widehat{ADM} = \widehat{ABM}$-góc nội tiếp cùng chắn một cung.

$$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle CMB \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD, \text{ không đổi.}$$

— **Trường hợp 2**: Hai tam giác $\triangle AMD$ và $\triangle CMB$ có:

$$\widehat{AMD} = \widehat{CBM} - \text{đối đỉnh}$$
$$\widehat{ADM} = \widehat{CBM} - \text{góc nội tiếp cùng chắn một cung}$$
$$\Rightarrow \triangle AMD \backsim \triangle CMB \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD, \text{ không đổi.}$$

□

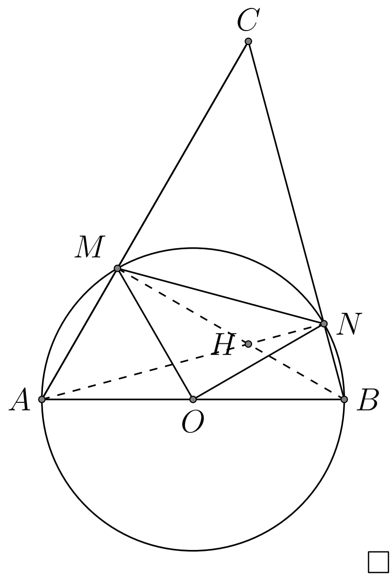
1. Bài tập tự luyện

BÀI 1. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB và C là một điểm bên ngoài đường tròn. Nối CA, CB gặp đường tròn theo thứ tự ở M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN.

❶ Chứng minh rằng $AH \perp AB$.

❷ Cho $\widehat{ACB} = 60°$, chứng minh $\triangle OMN$ là tam giác đều.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét $\triangle ABC$, ta có:
$\widehat{ANB} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn
$\Leftrightarrow AN \perp BC$. (1)
$\widehat{AMB} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn
$\Leftrightarrow BM \perp AC$. (2)
Từ (1),(2) suy ra: H là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow CH \perp AB$, đpcm.

❷ Xét $\triangle BMC$ vuông tại M, ta có:
$\widehat{ACB} = 60° \Leftrightarrow \widehat{MBC} = 30° \Leftrightarrow$ sđ $= 60°$.
Mặt khác ,ta có: $\widehat{MON} =$ sđ$\overset{\frown}{MN} = 60°$.
Vậy, $\triangle OMN$ cân (vì $OM = ON$) và có một góc $\widehat{MON} = 60°$ nên là tam giác đều.

□

BÀI 2. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường thẳng qua A cắt (O) tại M và (O') tại N (A nằm giữa M và N). Hỏi MBN là tam giác gì? Tại sao?

✍ **LỜI GIẢI.**

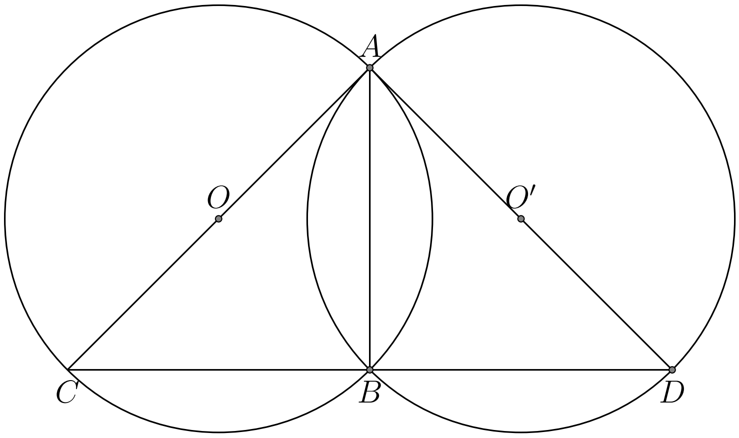
Hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau nên $AOBO'$ là hình thoi.
Do đó $\widehat{AOB} = \widehat{AO'B}$. Theo tính chất của góc nội tiếp, ta có:
$\widehat{NMB} = \widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AO'B} = \widehat{ANB} = \widehat{MNB}$.
Vậy, ta đương $\triangle BMN$ là tam giác cân tại B. □

BÀI 3. Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau tại A và B. Từ A vẽ đường kính AOC và $AO'D$.

❶ Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng và AB vuông góc với CD.

❷ Biết $R \geq r$ và $CD = a$, hãy tính BC và BD.

✍ **LỜI GIẢI.**



1. Ta có nhận xét: $\widehat{ABC} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O).
   $\widehat{ABD} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O).
   $\Rightarrow \widehat{CBD} = 180° \Leftrightarrow$ ba điểm B, C, D thẳng hàng.
   Ta cũng thấy ngay AB vuông góc với CD.
2. Đặt $BC = c$, khi đó $BD = a - x$.
   — Trong $\triangle ABC$ vuông tại B có $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 4R^2 - x^2$. (1)
   — Trong $\triangle ABD$ vuông tại B có $AB^2 = AD^2 - BD^2 = 4r^2 - (a - x)^2$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned} & 4R^2 - x^2 = 4r^2 - (a-x)^2 \Leftrightarrow 4R^2 - x^2 = 4r^2 - a^2 + 2ax - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2ax = 4R^2 - 4r^2 + a^2 \Leftrightarrow x = \frac{4R^2 - 4r^2 + a^2}{2a}. \end{aligned}$$

   Vậy, ta được:

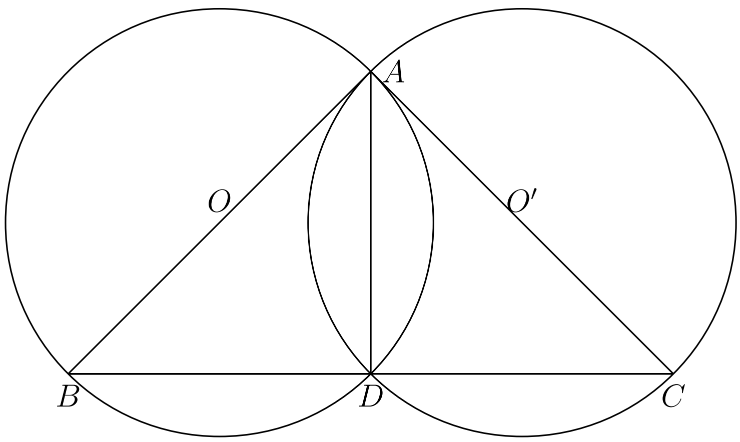
$$BC = \frac{4R^2 - 4r^2 + a^2}{2a}, BD = a - \frac{4R^2 - 4r^2 + a^2}{2a} = \frac{a^2 - 4R^2 + 4r^2}{2a}.$$

□

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$. Hai đường tròn đường kính AB và AC cắt nhau tại một điểm thứ hai là D.

1. Chứng minh ba điểm B, D, C thẳng hàng.
2. Đường thẳng AC cắt đường tròn đường kính AB tại E, đường thẳng AB cắt đường tròn đường kính AC tại F. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF cùng đi qua một điểm.

✍ **LỜI GIẢI.**



1. Ta có nhận xét:

$$\widehat{ADB} = 90^\circ, \text{ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn } (O)$$
$$\widehat{ADC} = 90^\circ, \text{ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn } (O)$$

$\Rightarrow \widehat{BDC} = 180^\circ \Leftrightarrow$ ba điểm B, C, D thẳng hàng.

Ta cũng thấy ngay $AD \perp BC$.

❷ Giả sử BE cắt CF tại M.

Xét $\triangle MBC$ ta có:

$$\widehat{BEC} = 90^\circ, \text{ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn } (O) \Leftrightarrow CE \perp BM \quad (1)$$
$$\widehat{BFC} = 90^\circ, \text{ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn } (O) \Leftrightarrow BF \perp CM \quad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra A là trực tâm $\triangle MBC \Rightarrow MA \perp BC$, đpcm.

Vậy, ba đường thẳng AD, BE, CF cùng đi qua điểm M.

□

BÀI 5. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, CD bằng nhau cắt nhau tại M (điểm C nằm trên cung nhỏ AB, điểm B nằm trên cung nhỏ (CD)).

❶ Chứng minh $AC = DB$.

❷ Chứng minh $\triangle MAC = \triangle MDB$.

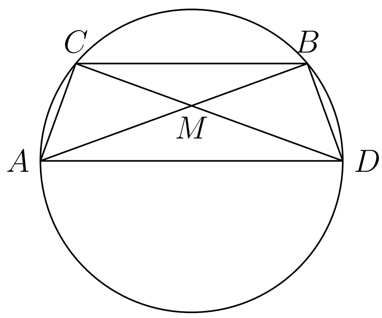
❸ Tứ giác $ACBD$ là hình gì? Chứng minh.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Từ giả thiết $AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

Khi đó $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} \Leftrightarrow AC = BD$, đpcm.

❷



Xét hai tam giác $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$, ta có:

$$\widehat{MAC} = \widehat{MDB}, \text{ góc nội tiếp cùng chắn cung } BC$$
$$AC = BD, \text{ theo kế quả câu a)}$$
$$\widehat{MCA} = \widehat{MBD} = \widehat{MDB}, \text{ góc nội tiếp cùng chắn cung} AD$$

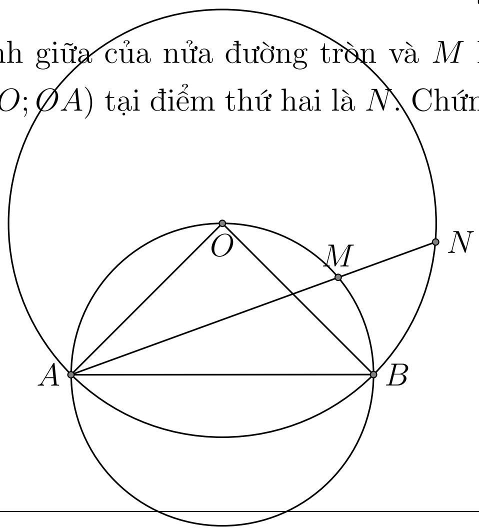
do đó $\triangle MAC = \triangle MDB$(g.c.g).

❸ Ta có $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Leftrightarrow AD \parallel BC$. Vậy, tứ giác $ACBD$ là hình thang cân.

□

BÀI 6. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi O là điểm chính giữa của nửa đường tròn và M là một điểm bất kì của nửa đường tròn đó. Tia AM cắt đường tròn $(O; OA)$ tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng $MN = MB$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Từ giả thiết, ta có ngay $\widehat{AOB} = 90^\circ$ và $\widehat{AMB} = 90^\circ$ vì chúng đều là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB.

Mặt khác, ta cũng có $OA = OB \Rightarrow B \in (O; OA)$.

Do đó, $\widehat{ANB} = \widehat{AOB} = 45^\circ$.

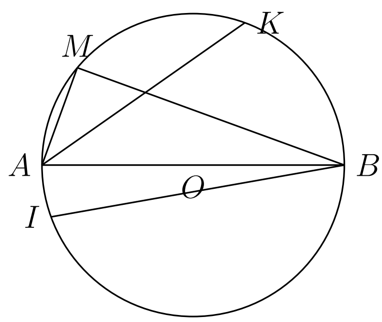
Khi đó , $\triangle BMN$ vuông tại M có $\widehat{MNB} = 45^\circ$ nên nó là tam giác vuông cân, suy ra $MN = NB$, đpcm.

□

BÀI 7. Cho đường tròn (O) và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I và K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB. Gọi P là giao điểm của AK và BI.

❶ Chứng minh ba điểm A, O, B thẳng hàng.
❷ Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle MAB$.
❸ Giả sử $MA = 12$ cm, $MB = 16$ cm, tính bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Từ giả thiết $\widehat{AMB} = 90^\circ \Leftrightarrow AB$ là đường kính $\Rightarrow$ ba điểm A, O, B thẳng hàng.
❷ Xét $\triangle MAB$, ta có
— Vì I là điểm chính giữa nhỏ MA nên:
$\Leftrightarrow \widehat{ABI} = \widehat{MBI} \Leftrightarrow BI$ là phân giác góc $\widehat{ABM}$.
— Vì K là điểm chính giữa của cung nhỏ MB nên:
$\overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{MK} \Leftrightarrow \widehat{BAK} = \widehat{MAK}$
$\Leftrightarrow AK$ là phân giác góc $\widehat{MAB}$.
Từ đó, suy ra P là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$ (vì nó là giao điểm của hai đường phân giác).
— Gọi r, p theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp và nửa chu vi $\triangle MAB$, ta có:

$$S_{\triangle MAB} = p \cdot r \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}MA \cdot MB = \frac{1}{2}\left(MA + MB + AB\right)r$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{MA \cdot MB}{MA + MB + AB} = \frac{MA \cdot MB}{MA + MB + \sqrt{MA^2 + MB^2}} = 4 \text{ cm}.$$

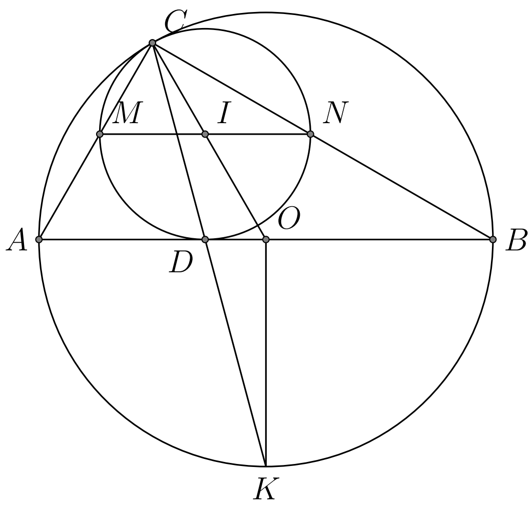
Vậy, bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$ bằng 4 cm.

□

BÀI 8. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C chạy trên một nửa đường tròn. Vẽ một đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA và CB tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

❶ Ba điểm M, I, N thẳng hàng.
❷ $ID \perp MN$.
❸ Đường thẳng CD đi qua điểm cố định.
❹ Nếu cách dựng đường tròn (I) nói trên.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)
$\Rightarrow \widehat{MCN} = 90^\circ \Leftrightarrow MN$ là đường kính (I).
Vậy, ba điểm M, I, N thẳng hàng.

❷ Từ giả thiết:
— Vì (I) tiếp xúc với AB tại D nên $ID \perp AB$.
— Vì (I) tiếp xúc với (O) tại C nên C, I, O thẳng hàng.
Ta có $\widehat{INC} = \widehat{ICN}$, vì $\triangle ICN$ cân tại I, $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$, vì $\triangle OBC$ cân tại O.
Suy ra $\widehat{INC} = \widehat{OBC} \Leftrightarrow MN \parallel AB$.
Từ đó $ID \perp MN$, đpcm.

❸ Gọi K là giao điểm của CD với (O), ta có:

$$\begin{aligned} ID \perp MN \quad & \Leftrightarrow \overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{ND} \Leftrightarrow \widehat{MCD} = \widehat{NCD} \\ & \Leftrightarrow \widehat{ACK} = \widehat{BCK} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{BK} \Leftrightarrow K \text{ là điểm chính giữa của cung} \end{aligned}$$

Do đó K cố định. Vậy, CD luôn đi qua điểm cố định K.

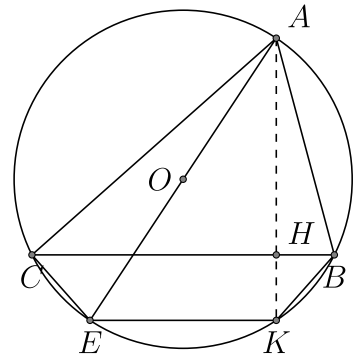
❹ Để dụng đường tròn (I), ta thực hiện:
— Dựng OK vuông góc với AB, với K thuộc nửa đường tròn không chứa điểm C.
— Nối CK cắt AB tại D.
— Dựng đường thẳng qua D vuông góc với AB cắt CD tại I.
— Dựng đường tòn (I, ID)-đây chính là đường tròn cần dựng.

□

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Kẻ đường kính AE.

❶ Tính $\widehat{ACE}$.
❷ Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.
❸ Gọi K là giao điểm của AH với đường tròn (O). Tứ giác $BCEK$ là hình gì?

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có ngay $\widehat{ACE} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

❷ Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$, góc nội tiếp cùng chắn cung AC

$\Leftrightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OAC}$, cùng phụ với hai góc bằng nhau ở trên.

❸ Ta có $\widehat{AKE} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$$EK \perp AK \Leftrightarrow EK \parallel BC, \text{ vì cùng vuông góc với } AH \quad (1)$$
$$\Rightarrow \overparen{BK} = \overparen{CE}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta kết luận $BCEK$ là hình thang cân.

□

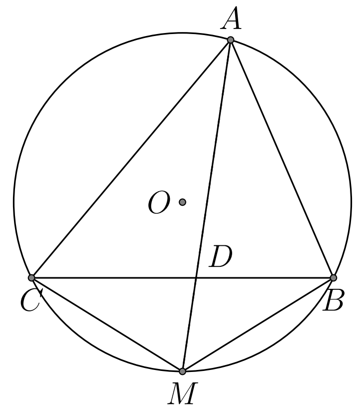
BÀI 10. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt đường tròn tại M.

❶ Chứng minh rằng $\triangle BMC$ là tam giác cân.

❷ Chứng minh rằng $\widehat{BMC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$.

❸ Gọi D là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng $AB \cdot AC = AD \cdot AM$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Từ giả thiết "AM là tia phân giác góc $\widehat{A}$", ta suy ra:

$\widehat{BAM} = \widehat{CAM} \Leftrightarrow \overparen{BM} = \overparen{CM}$

$\Leftrightarrow \triangle MBC$ cân tại M.

❷ Ta có $\widehat{BMC} = \widehat{BMA} + \widehat{CMA} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$, đpcm.

❸ Xét hai tam giác $\triangle AMB$ và $\triangle ACD$ ta có:

$\widehat{BMA} = \widehat{ACD}$ và $\widehat{MAB} = \widehat{CAD} \Rightarrow \triangle AMB \backsim \triangle ACD$.

$\Leftrightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Leftrightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AM$, đpcm.

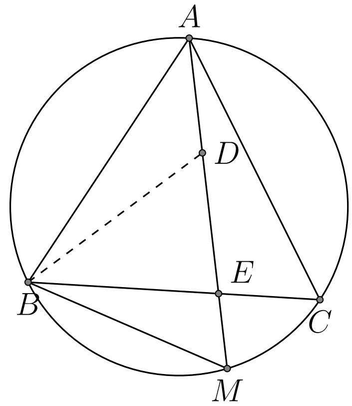
□

BÀI 11. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm trên cung BC. Trên tia AM lấy điểm D sao cho $MD = MB$.

❶ $\triangle MBD$ là hình gì? So sánh hai tam giác $\triangle BDA$ và $\triangle BMC$.

❷ Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét $\triangle MBD$, ta có $MB = MD$, giả thiết $\widehat{BMD} = \widehat{BMA} = \widehat{BCA} = 60^\circ$.

Do đó, $\triangle MBD$ là tam giác đều.

Xét hai tam giác $\triangle BDA$ và $\triangle BMC$ ta có:

$BD = BM$, vì $\triangle MBD$ là tam giác đều.

$\widehat{ABD} = \widehat{CBM}$, vì tổng của chúng với $\widehat{CBD}$ bằng 60°.

$AB = CB$, vì $\triangle ABC$ là tam giác đều do có $\triangle BDA = \triangle BMC$(c.g.c).

❷ Ta có ngay $MA = MD + DA = MB + MC$, đpcm.

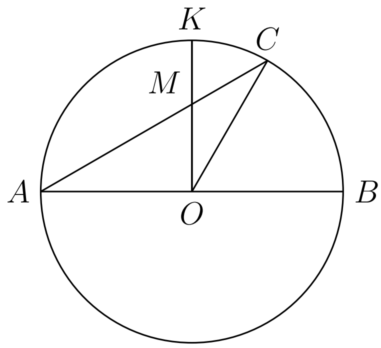
□

BÀI 12. Cho nửa đường tròn đường kính AB, K là điểm chính giữa của cung AB. Vẽ bán kính OC sao cho $\widehat{BOC} = 60^\circ$.

❶ Gọi M là giao điểm của AC và OK. Chứng minh rằng $MO = MC$.

❷ Cho $AB = 2R$, tính MC theo R.

✍ **LỜI GIẢI.**



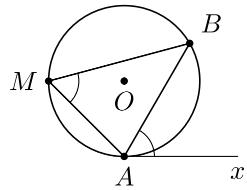
❶ Vì $\triangle OAC$ cân tại O ($OA = OC$) nên:
$\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$. (1)
Mặt khác, ta lại có $\widehat{COM} = \widehat{BOK} - \widehat{BOC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. (2)
Từ (1) và (2) ta suy ra $\triangle MOC$ cân tại $M \Leftrightarrow MO = MC$, đpcm.

❷ Xét $\triangle OAM$ vuông tại O, ta có
$MO = OA \cdot \tan \widehat{A} = R \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.
Vậy, ta được $MC = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

□

BÀI 4 GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT



Định lí 1. *Trong một đường tròn, số đo của góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cung đi qua tiếp điểm bằng nửa số đo của cung bị chắn.*
Ta có minh họa: $\widehat{BAx} = \dfrac{1}{2}$*sđ*$\,\overset{\frown}{AB}$

Nhận xét: Như vậy, góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây cung cùng chắn một cung thì bằng nhau, cụ thể $\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$.

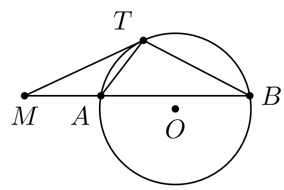
B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Giải bài toán định tính

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 1 (Bài 34/tr80-SGK). Từ một điểm M bên ngoài đường tròn (O) ta kẻ một tiếp tuyến MT và một cát tuyến MAB của đường tròn đó. Chứng minh rằng $MT^2 = MA \cdot MB$.

LỜI GIẢI.



Xét hai tam giác $\triangle MAT$ và $\triangle MTB$ có:

$$\widehat{M} : \text{chung}$$
$$\widehat{ATM} = \widehat{MBT}$$

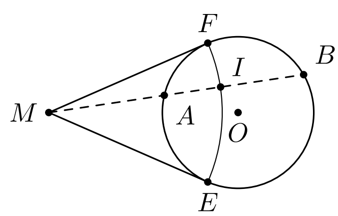
Suy ra $\triangle MAT \backsim \triangle MTB$. Nên $\dfrac{MT}{MB} = \dfrac{MA}{MT}$ hay $MT^2 = MA \cdot MB$.

Nhận xét. *Ví dụ tiếp theo sẽ sử dụng kết quả $MA \cdot MB$ không đổi để giải bài toán quỹ tích.*

□

VÍ DỤ 2. Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm bên ngoài đường tròn. Tia Mx quay quanh M và cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Gọi I là một điểm thuộc tia Mx sao cho $MI^2 = MA.MB$. Tìm quỹ tích điểm I.

LỜI GIẢI.



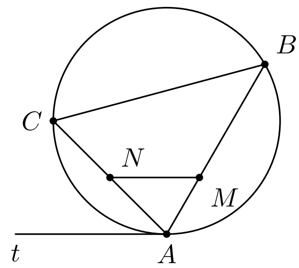
Phần thuận: Kẻ hai tiếp tuyến ME, MF tới đường tròn (O).
Ta có $ME^2 = MF^2 = MA \cdot MB = MI^2$ nên $ME = MF = MI$.
Suy ra I thuộc đường tròn (M, ME).
Hạn chế quỹ tích: Vì A chỉ chạy trên cung $\overset{\frown}{EF}$ của đường tròn (O) nên I chỉ chạy trên cung $\overset{\frown}{EF}$ của đường tròn (M, ME) nằm trong đường tròn (O).

Phần đảo: Lấy điểm I thuộc $\overset{\frown}{EF}$ của đường tròn (M, ME) nằm trong đường tròn (O). Nối MI cắt đường tròn (O) tại A và B. Ta cần chứng minh $MA \cdot MB = MI^2$. Thật vậy, $MI^2 = ME^2 = MA \cdot MB$.
Kết luận: Vậy quỹ tích điểm I là cung $\overset{\frown}{EF}$ của đường tròn (M, ME) nằm trong đường tròn (O).

□

VÍ DỤ 3 (Bài 33/tr80-SGK). Cho A, B, C là ba điểm cùng nằm trên một đường tròn. At là tiếp tuyến của đường tròn tại A. Đường thẳng song song với At cắt AB tại M và cắt AC tại N. Chứng minh rằng $AB \cdot AM = AC \cdot AN$.

✍ **LỜI GIẢI.**



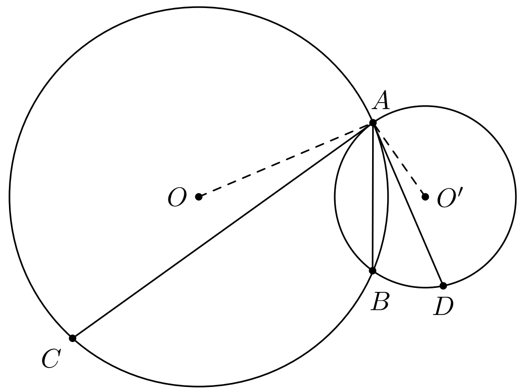
Ta có $\widehat{CAt} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC}$; $\widehat{CAt} = \widehat{ANM}$ (do $MN \parallel At$).
Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$.
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AMN$ có $\widehat{BAC}$ chung; $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$.
Suy ra $\triangle ABC \backsim \triangle AMN$. Nên $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AM}$ hay $AB \cdot AM = AC \cdot AN$

□

VÍ DỤ 4 (Bài 29/tr79-SGK). Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Từ A vẽ hai tiếp tuyến với hai đường tròn. Hai tiếp tuyến này gặp đường tròn O ở C và đường tròn (O') ở D. Chứng minh rằng $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DBA$ có



$$\widehat{ACB} = \widehat{DAB}$$
$$\widehat{BCA} = \widehat{BDA}$$

Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$.

Nhận xét: Nếu khai thác thêm sự bằng nhau của hai cặp góc dẫn tới hai tam giác đồng dạng chúng ta sẽ nhận được kết quả khác, ví dụ

❶ $AB^2 = BC.BD$
❷ $\dfrac{AC}{AD} = \sqrt{\dfrac{BC}{BD}}$.

Thật vậy, ta được $\triangle ABC \backsim \triangle DAB$ suy ra $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{AC}{DA}$.
Từ đó

❶ $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{BC}{BA} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot BD$.
❷ $\begin{cases} \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{DA} \\ \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{AC}{DA} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AC}{AD} \cdot \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AB}{BD} \cdot \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \left(\dfrac{AC}{AD}\right)^2 = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \sqrt{\dfrac{BC}{BD}}$.

□

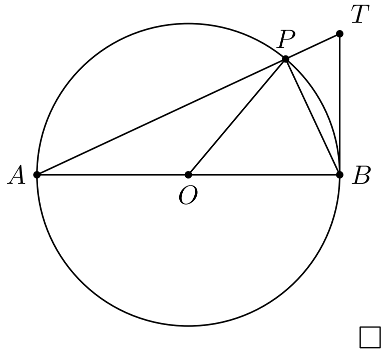
VÍ DỤ 5 (Bài 27/tr79-SGK). Cho đường tròn tâm (O), đường kính AB. Lấy điểm P khác A và B trên đường tròn. Gọi T là giao điểm của AP với tiếp tuyến tại B của đường tròn. Chứng minh rằng $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$.

LỜI GIẢI.

Ta có $\widehat{PBT} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{PB}$ và $\widehat{PAB} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{PB}$ nên $\widehat{PBT} = \widehat{PAB}$.

Xét $\triangle OAP$ cân tại O, ta có $\widehat{APO} = \widehat{PAB}$.

Kết hợp các điều vừa chứng minh ta được $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$.



□

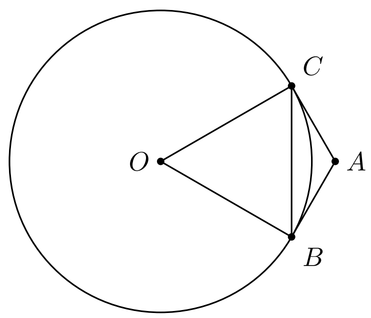
DẠNG 2. Giải bài toán định lượng

Phương pháp giải:

VÍ DỤ 6 (Bài 11/tr72-SGK). Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R$. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở A. Tính số đo các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$.

LỜI GIẢI.

Ta có $BC = OB = OC = R$. Suy ra $\triangle OBC$ đều và $\widehat{BOC} = 60^\circ$. Nên sđ $\overset{\frown}{BC} = \widehat{BOC} = 60^\circ$.



$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = 30^\circ$$
$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = 30^\circ$$
$$\widehat{BAC} = 180^\circ - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = 120^\circ$$

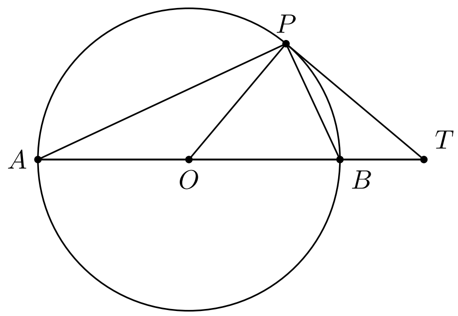
□

VÍ DỤ 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một tiếp tuyến của đường tròn tại P cắt đường thẳng AB tại T (điểm B nằm giữa O và T). Tính $\widehat{BTP} + 2\widehat{TPB}$.

LỜI GIẢI.

Ta có $\widehat{TPB} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{PB} = \dfrac{1}{2}\widehat{POB} = \dfrac{1}{2}\widehat{POT}$ nên

$$\widehat{POT} = 2\widehat{TPB}.$$



Do PT là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại P nên $OP \perp PT$.

Lại có $\triangle OPT$ vuông tại P. Do đó

$$\widehat{BTP} + 2\widehat{TPB} = \widehat{POT} + \widehat{BTP} = 90^\circ.$$

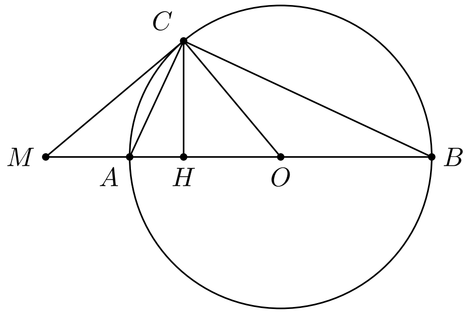
□

VÍ DỤ 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của C trên AB.

❶ Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCH}$.

❷ Giả sử $MA = a$, $MC = 2a$, tính AB và CH.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Nhận xét rằng $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $AC \perp BC$.
Suy ra $\widehat{ACH} = \widehat{ABC}$. Mặt khác, ta lại có $\widehat{ABC} = \widehat{ACM}$.
Từ đó $\widehat{ACH} = \widehat{ACM}$ hay CA là tia phân giác của $\widehat{MCH}$.

❷ Ta có $MC^2 = MA \cdot MB \Leftrightarrow MB = \dfrac{MC^2}{MA} = 4a$, $AB = MB - MA = 4a - a = 3a$.
Xét $\triangle OCM$, ta có $OC \perp MC$ nên

$$S_{OCM} = \frac{1}{2}OC \cdot MC = \frac{1}{2}CH \cdot OM \Leftrightarrow CH = \frac{OC \cdot MC}{OM} = \frac{\dfrac{AB}{2} \cdot MC}{MA + \dfrac{AB}{2}} = 1{,}2a.$$

□

Ⓒ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Từ một điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB. Vẽ đường tròn (O') ngoại tiếp $\triangle MAT$. Từ M vẽ tiếp tuyến xy của đường tròn (O'). Chứng minh rằng

❶ $MT^2 = MA \cdot MB$.

❷ $BT \parallel xy$.

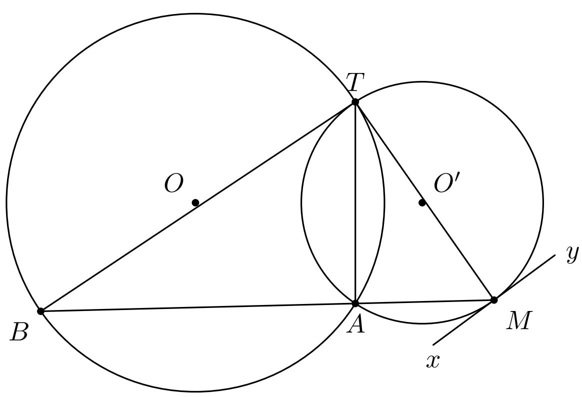
✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Hai tam giác $\triangle MAT$ và $\triangle MTB$ có

$$\begin{aligned} &\widehat{M} : \text{chung} \\ &\widehat{ATM} = \widehat{MBT} \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle MAT \backsim \triangle MTB$. Nên $\dfrac{MT}{MB} = \dfrac{MA}{MT}$, hay $MT^2 = MA \cdot MB$.

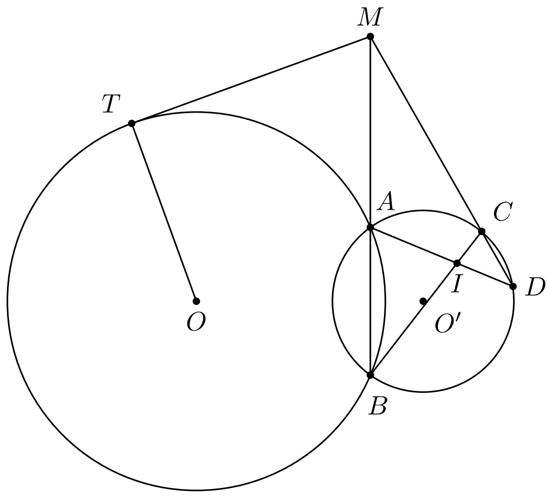


❷ Ta có $\widehat{AMx} = \widehat{ATM}$. Suy ra $\widehat{AMx} = \widehat{MBT}$. Nên $xy \parallel BT$.

□

BÀI 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Trên đường thẳng AB lấy một điểm M (điểm M không thuộc đoạn thẳng AB). Vẽ tiếp tuyến MT của đường tròn (O) và cát tuyến MCD của đường tròn (O'). Chứng minh rằng $MT^2 = MC \cdot MD$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CMB$, ta có

$$\begin{aligned} &\widehat{M} : \text{chung} \\ &\widehat{ADM} = \widehat{CBM} \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle AMD \backsim \triangle CMB$. Nên $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MB}$, hay

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD. \qquad (1)$$

Xét $\triangle MAT$ và $\triangle MTB$, ta có

$$\begin{aligned} &\widehat{M} : \text{chung} \\ &\widehat{ATM} = \widehat{MBT} \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle MAT \backsim \triangle MTB$. Nên $\dfrac{MT}{MB} = \dfrac{MA}{MT}$, hay $MT^2 = MA \cdot MB$. (2)

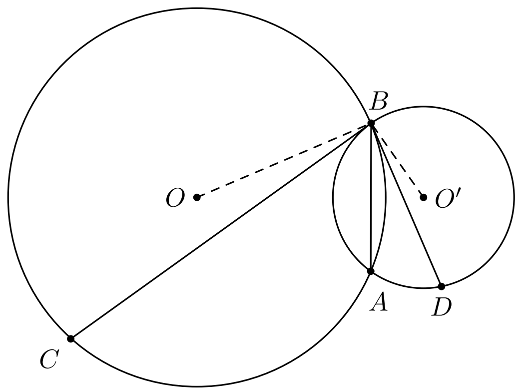
Từ (1) và (2) suy ra $MT^2 = MC \cdot MD$ □

BÀI 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ dây BC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O'). Vẽ dây BD của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O). Chứng minh rằng

❶ $AB^2 = AC \cdot AD$.

❷ $\dfrac{BC}{BD} = \sqrt{\dfrac{AC}{AD}}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle ADB$ có

$$\begin{aligned} &\widehat{ACB} = \widehat{ABD} \\ &\widehat{ABC} = \widehat{ADB} \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle ABC \backsim \triangle ADB$. Nên $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DB} = \dfrac{AC}{AB}$.

❶ $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD$.

❷ $\begin{cases} \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DB} \\ \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{DB} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{BC}{BD}\right)^2 = \dfrac{AC}{AD}$

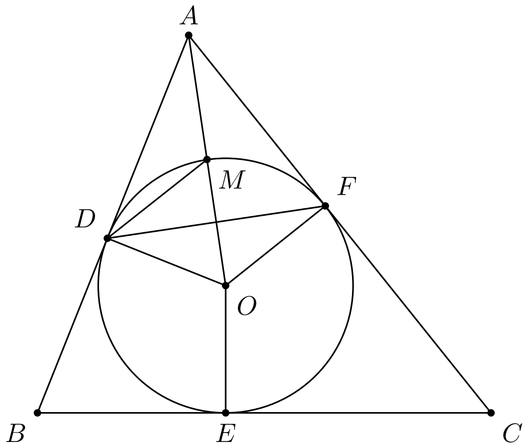
$\Rightarrow \dfrac{BC}{BD} = \sqrt{\dfrac{AC}{AD}}$.

□

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F là các tiếp điểm của đường tròn trên các cạnh AB, BC, CA. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường tròn (O) với các tia OA, OB, OC.

Chứng minh rằng các điểm M, N, P lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $\triangle ADF$, $\triangle BDE$, $\triangle CEF$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Để chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $\triangle ADF$, ta chứng minh M là giao điểm của hai tia phân giác trong của $\triangle ADF$.

AD, là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên AM là tia phân giác của $\widehat{DAF}$. (1)

Lại có $\widehat{MDF} = \widehat{MFD} = \widehat{MDA}$. nên DM là tia phân giác của $\widehat{ADF}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $\triangle ADF$.

Chứng minh tương tự với các điểm N và P. □

BÀI 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường tròn (O') tại D. Vẽ đường tròn (I) qua ba điểm A, C, D cắt đường thẳng AB tại điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng

❶ $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = 180^\circ$.

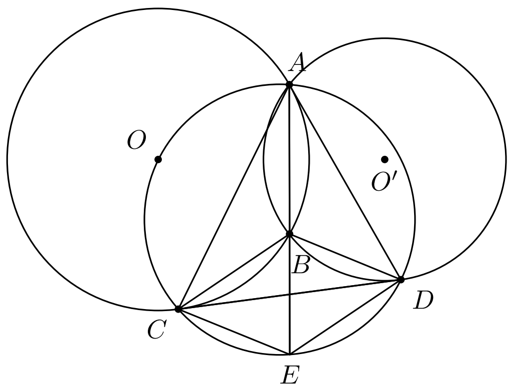
❷ Tứ giác $BCED$ là hình bình hành.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Sử dụng tính chất góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung, ta có $\widehat{CAB} = \widehat{BCD}$ và $\widehat{DAB} = \widehat{BDC}$.

Trong $\triangle BCD$ có

$$\begin{aligned}180^\circ &= \widehat{BCD} + \widehat{BDC} + \widehat{CBD}\\ &= \widehat{CAB} + \widehat{DAB} + \widehat{CBD}\\ &= \widehat{CAD} + \widehat{CBD}.\end{aligned}$$



❷ Trong đường tròn (ACD), ta có

$$\begin{aligned}&\widehat{EDC} = \widehat{CAB} = \widehat{BCD} \Rightarrow BC \parallel DE\\ &\widehat{ECD} = \widehat{DAB} = \widehat{BDC} \Rightarrow BD \parallel CE.\end{aligned}$$

Vậy tứ giác $BCDE$ là hình bình hành.

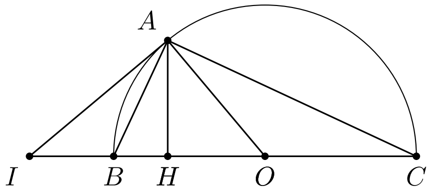
□

BÀI 6. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn $(AB < AC)$. Tiếp tuyến tại A cắt đường thẳng BC ở I. Kẻ $AH \perp BC$. Chứng minh rằng

❶ AB là tia phân giác của $\widehat{IAH}$.

❷ $IA^2 = IB \cdot IC$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên $AC \perp AB \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{BAH}$. (1)

Mặt khác, ta lại có $\widehat{ACH} = \widehat{BAI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{BAI}$. Nên AB là tia phân giác của $\widehat{IAH}$.

❷ Chứng minh tương tự như các bài toán trên ta có $\triangle IAB \backsim \triangle ICA \Rightarrow IA^2 = IB \cdot IC$.

□

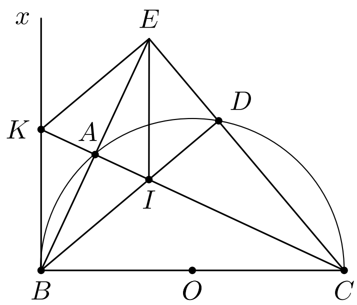
BÀI 7. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Điểm A thuộc nửa đường tròn $(AB < AC)$. Gọi E là điểm đối xứng với B qua A.

❶ $\triangle BCE$ là tam giác gì?

❷ Gọi D là giao điểm của CE với nửa đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Bx với nủa đường tròn (Bx và A cùng phía với BC). Chứng minh rằng BA là tia phân giác của góc $\widehat{DBx}$.

❸ CA cắt BD, Bx theo thứ tự ở I, K. Tứ giác $BKEI$ là hình gì?

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét $\triangle BCE$, ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $CA \perp BE$.

$\triangle BCE$ có CE vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao nên $\triangle BCE$ cân tại C.

❷ $\widehat{KBA} = \widehat{BCA} = \widehat{ECA} = \widehat{DCA} = \widehat{DBA}$ nên BA là tia phân giác của góc $\widehat{DBx}$.

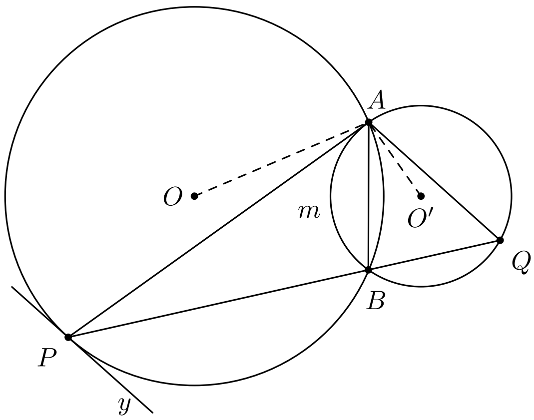
❸ $\triangle BKI$ có BA vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao nên $\triangle BKI$ cân tại B. Suy ra $KA = IA$ và $BK = BI$.

Xét tứ giác $BKEI$ có hai đường chéo KI và BE cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và $BK = BI$ nê tứ giác $BKEI$ là hình thoi.

□

BÀI 8. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại điểm thứ P. Tia PB cắt đường tròn (O') tại Q. Chứng minh AQ song song với tiếp tuyến tại P của đường tròn (O).

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét đường tròn (O) ta có

$$\widehat{PAB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{PB} \text{ (góc nội tiếp chắn cung } \overset{\frown}{PB})$$
$$\widehat{PBy} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{PB} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến } Py \text{ và dây cung } \overset{\frown}{PB})$$

Suy ra $\widehat{PBy} = \widehat{PAB}$. (1)

Xét đường tròn (O') ta có

$$\widehat{AQB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AmB} \text{ (góc nội tiếp chắn cung } \overset{\frown}{AmB})$$
$$\widehat{PAB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AmB} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến } AP \text{ và dây cung } \overset{\frown}{AB})$$

Suy ra $\widehat{AQB} = \widehat{PAB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AQB} = \widehat{PBy}$. Nên $AQ \parallel xy$. □

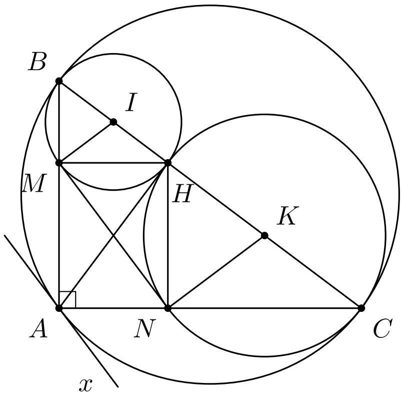
BÀI 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm I có đường kính BH, nó cắt AB ở M. Vẽ đường tròn tâm K có đường kính CH, nó cắt AC ở N.

❶ Tứ giác $AMHN$ là hình gì?

❷ Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

❸ Vẽ tiếp tuyết Ax của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng Ax song song với MN.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Tứ giác $AMHN$ là hình chữ nhật vì có ba góc vuông.

❷ $\widehat{NMI} = \widehat{NMH} + \widehat{IMH} = \widehat{AHM} + \widehat{IHM} = \widehat{AHI} = 90^\circ$ nên $MN \perp MI$.

Chứng minh tương tự có $MN \perp NK$.

❸ $\widehat{xAC} = \widehat{ABC} = \widehat{MBH} = \widehat{NMH} = \widehat{MNA}$ nên $Ax \parallel MN$.

□

BÀI 5 GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN, GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

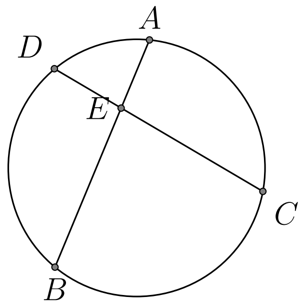
1. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn

Định lí 1. *Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn có số đo bằng nửa tổng của số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh ấy.*

Ta có minh họa

$$\widehat{AEC} = \widehat{BED} = \frac{sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{BD}}{2}$$

$$\widehat{AED} = \widehat{BEC} = \frac{sđ\overset{\frown}{AD} + sđ\overset{\frown}{BC}}{2}.$$

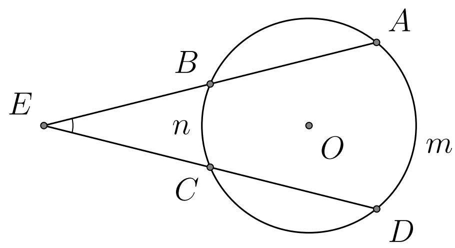


2. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

Định lí 2. *Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn có số đo bằng nửa hiệu của số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc.*

Ta có minh họa

$$\widehat{AED} = \frac{sđ\overset{\frown}{AmD} - sđ\overset{\frown}{BnC}}{2}.$$



B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

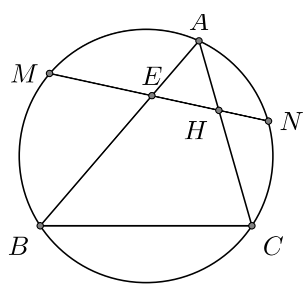
VÍ DỤ 1. Một đường tròn (O) và hai dây AB, AC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB và AC. Đường thẳng MN cắt dây AB tại E và cắt dây AC tại H. Chứng minh $\triangle AEH$ là tam giác cân.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\widehat{AEH} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AN} + \text{sđ}\overset{\frown}{BM}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{CN} + \text{sđ}\overset{\frown}{AM}\right) = \widehat{AHE}.$$

Vậy, ta được $\triangle AEH$ cân tại A.



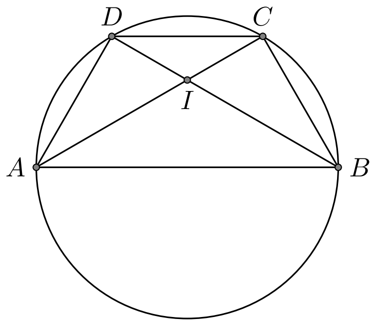
□

VÍ DỤ 2. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AD = DC = CB$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AB. Tính số đo của góc $\widehat{AIB}$ với I là giao điểm của AC và BD.

✍ **LỜI GIẢI.**

Từ giả thiết, ta nhận được:
sđ$\overset{\frown}{AB} = 180^\circ$
sđ$\overset{\frown}{AD} =$ sđ$\overset{\frown}{DC} =$ sđ$\overset{\frown}{CB} = \dfrac{1}{3}$sđ$\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$
Số đo của góc $\widehat{AIB}$ được cho bởi:

$$\widehat{AIB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{DC}\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ + 60^\circ\right) = 120^\circ.$$



□

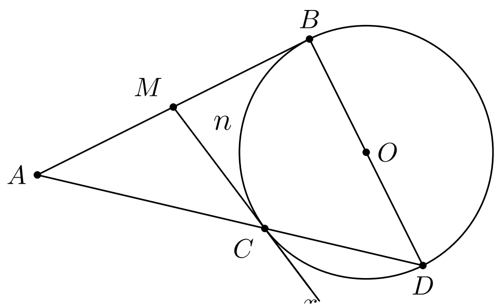
Nhận xét. *Cách làm trong lời giải của ví dụ trên được hiểu là "Để chứng minh một tam giác là tam giác đều ta đi chứng minh có là tam giác cân và có một góc bằng 60°".*

VÍ DỤ 3. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MB, MC. Vẽ đường kính BOD. Hai đường thẳng CD và MB cắt nhau tại A. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì tính chất của hai tiếp tuyến nên $MB = MC$. (1)
Vì $\widehat{BAD}$ là góc ở đỉnh bên ngoài đường tròn nên:

$$\begin{aligned}\widehat{BAD} &= \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BmD} - \text{sđ}\overset{\frown}{BnC}}{2} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BnD} - \text{sđ}\overset{\frown}{BnC}}{2}\\ &= \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{CD}}{2} = \widehat{xCD} = \widehat{ACM}.\end{aligned}$$



Vậy $\triangle MAC$ cân tại M, suy ra $MA = MC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $MA = MB$, tức M là trung điểm của AB. □

Nhận xét. *Trong ví dụ trên, ta phải chứng minh $MA = MB$ nhưng $MB = MC$ (tính chất của hai tiếp tuyến) nên ta cần chứng minh $MA = MC$, tức là ta phải chứng minh $\triangle MAC$ cân.*

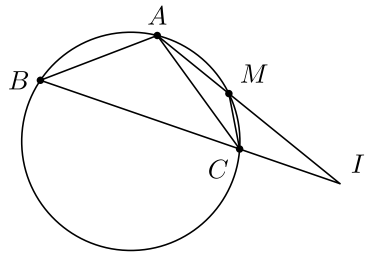
Khi tính số đo của góc A ta đã thay thế cung $\overset{\frown}{BmD}$ bởi cung $\overset{\frown}{BnD}$ có cùng số đo. Nói chung khi phải tính tổng (hay hiệu) số đo của hai cung nào đó, ta thường dùng phương pháp thay thế một cung bởi một cung khác bằng nó để được hai cung liền nhau (nếu tính tổng) hoặc hai cung có một phần chung (nếu tính hiệu).

VÍ DỤ 4. Cho đường tròn (O) và hai dây cung bằng nhau AB, AC. Trên cung nhỏ AC lấy điểm M. Gọi I là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = \widehat{ACM}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có ngay: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$, vì $AB = AC$.

$$\begin{aligned}\widehat{AIC} = \widehat{AIB} &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{MC}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\overset{\frown}{MC}\right) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM} \qquad (1)\end{aligned}$$



Lại có: $\widehat{ACM} = \overset{\frown}{AM}$ ()góc nội tiếp). (2)

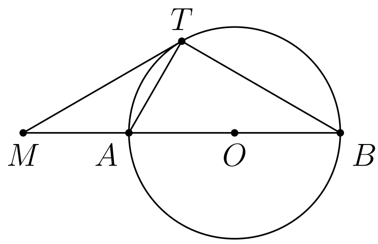
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AIC} = \widehat{ACM}$, đpcm.

□

Nhận xét. *Ta có hai trường hợp đặc biệt của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, cụ thể:*

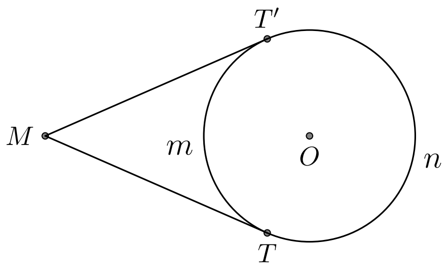
Trường hợp 1: Với MT là tiếp tuyến và AB là đường kính. Khi đó:

$$\begin{aligned}\widehat{TMB} &= \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{AB} - sđ\overset{\frown}{TA}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(180^\circ - sđ\overset{\frown}{TA}\right) - sđ\overset{\frown}{TA}\right]\\ &= 90^\circ - sđ\overset{\frown}{TA}\\ &= \frac{1}{2}\left[sđ\overset{\frown}{TB} - \left(180^\circ - sđ\overset{\frown}{TB}\right)\right] = sđ\overset{\frown}{TB} - 90^\circ.\end{aligned}$$



Trường hợp 2: Với MT, MT' là hai tiếp tuyến.

$$\begin{aligned}\widehat{TMT'} &= 180^\circ - sđ\overset{\frown}{TmT'}\\ &= sđ\overset{\frown}{TnT'} - 180^\circ.\end{aligned}$$



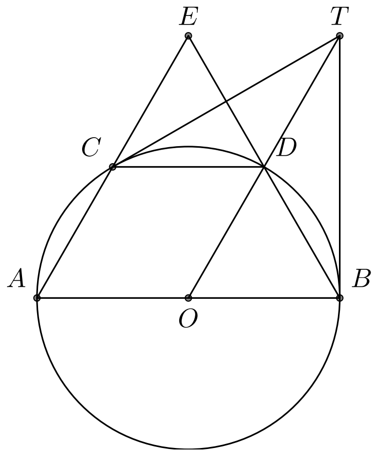
VÍ DỤ 5. Trên một đường tròn, lấy liên tiếp ba cung AC, CD, DB sao cho sđ$\overset{\frown}{AC}$ = sđ$\overset{\frown}{CD}$ = sđ$\overset{\frown}{DB} = 60^\circ$. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại T. Chứng minh rằng:

❶ $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$.

❷ CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có
$\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - \left(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD} + \text{sđ}\overset{\frown}{DB}\right) = 180^\circ$;
$\widehat{AEB} = \dfrac{1}{2}\left[\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{CD}\right] = \dfrac{1}{2}\left[180^\circ - 60^\circ\right] = 60^\circ$;
$\widehat{BTC} = \dfrac{1}{2}\left[\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{AC} - \left(\text{sđ}\overset{\frown}{CD} + \text{sđ}\overset{\frown}{DB}\right)\right]$
$\quad = \dfrac{1}{2}\left[180^\circ + 60^\circ - (60^\circ + 60^\circ)\right] = 60^\circ$.
Vậy, ta được $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$.



❷ Ta có
$$\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD} = \widehat{DCT}.$$
Vậy, ta được CD là tia phân giác của góc BCT.

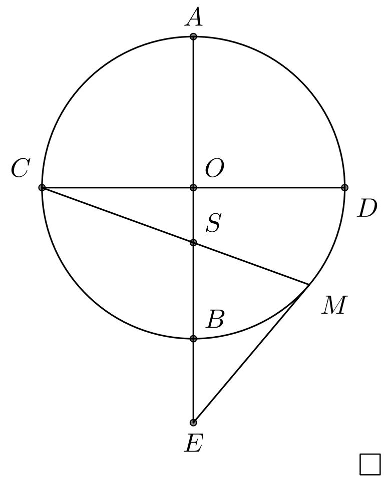
□

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn (O). Trên cung nhỏ BD lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M cắt tia AB ở E, đoạn thẳng CM cắt AB ở S. Chứng minh $ES = EM$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có
$$\widehat{ESM} = \frac{1}{2}\left[\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{BM}\right] = \frac{1}{2}\left[\text{sđ}\overset{\frown}{CB} + \text{sđ}\overset{\frown}{BM}\right] = \widehat{EMS}.$$
Suy ra $\triangle ESM$ cân tại $E \Rightarrow ES = EM$.

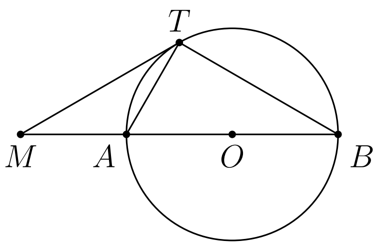


□

BÀI 2. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB đi qua tâm (A nằm giữa M và B). Giả sử số đo của cung nhỏ AT bằng 60°. Tính số đo của góc $\widehat{TMB}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có
$\widehat{TMB} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BT} - \text{sđ}\overset{\frown}{AT}\right)$
$\quad = \dfrac{1}{2}\left[\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{AT}\right) - \text{sđ}\overset{\frown}{AT}\right]$
$\quad = \dfrac{1}{2}\left(180^\circ - 60^\circ - 60^\circ\right) = 30^\circ$.



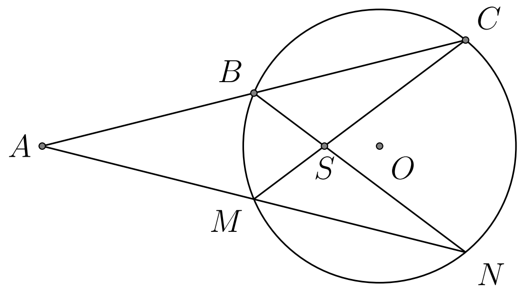
□

BÀI 3. Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến ABC và AMN sao cho hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại một điểm S nằm bên trong đường tròn. Chứng minh $\widehat{A} - \widehat{BSM} = 2\widehat{CMN}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \frac{1}{2}\left[\text{sđ}\overset{\frown}{CN} - \text{sđ}\overset{\frown}{BM}\right]\\ \widehat{MSB} &= \frac{1}{2}\left[\text{sđ}\overset{\frown}{CN} + \text{sđ}\overset{\frown}{BM}\right] = \widehat{A} + \widehat{BSM}\\ &= \text{sđ}\overset{\frown}{CN} = 2\widehat{CMN}.\end{aligned}$$



□

BÀI 4. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm N. Các đường thẳng CN và DN lần lượt cắt đường thẳng AB tại E và F. Tiếp tuyến của đường tròn tại N cắt đường thẳng AI tại I. Chứng minh rằng:

❶ Các tam giác $\triangle INE$ và $\triangle INF$ là tam giác cân.

❷ $AI = \frac{1}{2}(AE + AF)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

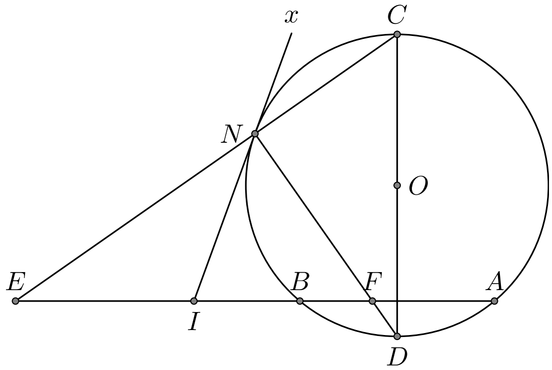
❶ Từ giả thiết $CD \perp AB$ và CD là đường kính $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$ và $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{AEC} &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\overset{\frown}{BN}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\overset{\frown}{BN}\right)\\ &= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{NC} = \widehat{CNx} = \widehat{INE}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \triangle INE$ cân tại I.

$$\begin{aligned}\widehat{NFI} &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{BN}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\overset{\frown}{BN}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ND} = \widehat{IND}\end{aligned}$$



$\Rightarrow \triangle INF$ cân tại I.

❷ Từ kết quả câu a) Ta có $IE = IN = IF$.

Nhận xét rằng: $AI = AE - IE$ và $AI = AF + IF \Rightarrow 2AI = AE + AF \Leftrightarrow AI = \frac{1}{2}(AE + AF)$.

□

BÀI 5. Cho đường tròn (O, R) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = R\sqrt{2}$. Vẽ dây CN đi qua điểm M. Từ N vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn. Chứng minh rằng:

❶ $xy \parallel AC$

❷ CN là tia phân giác của góc $\widehat{BCD}$.

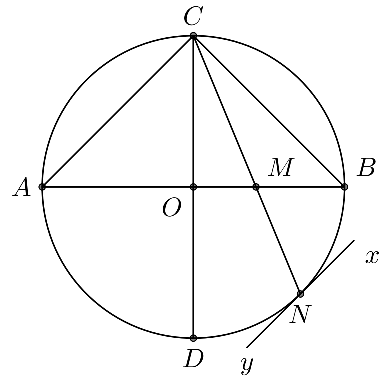
✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Ta có $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$. Và $AC = \sqrt{OC^2 + OA^2} = R\sqrt{2}$. Suy ra $\triangle CAM$ cân tại A. Nên

$$\widehat{ACM} = \widehat{AMC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{BN}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{BN}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CN} = \frac{1}{2}\widehat{CNx}.$$

Suy ra $xy \parallel AC$.



❷ Ta có $BD \parallel AC$ nên $xy \parallel BD$. Mà $ON \perp xy$ nên $ON \perp BD$.
Mặt khác tam giác OBD cân tại O nên ON là phân giác góc $\widehat{BOD}$. Suy ra N là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BD}$. Vậy CN là tia phân giác của góc $\widehat{BCD}$.

□

BÀI 6. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD. Vẽ dây BM vuông góc với tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$, dây này cắt CD tại E. Chứng minh rằng:

❶ BM là tia phân giác của góc $\widehat{CBD}$.

❷ $MD^2 = ME \cdot MB$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Xét $\triangle ABE$, ta nhận thấy:

AH vừa là phân giác, vừa là đường cao

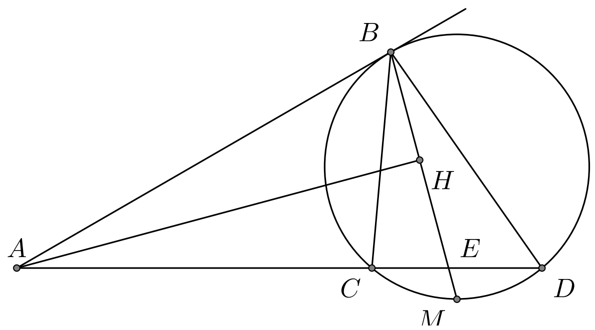
$\Leftrightarrow \triangle ABE$ cân tại $A \Leftrightarrow \widehat{ABE} = \widehat{AEB}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{DM}\right)$

$\Leftrightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CM} = \text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{DM}$

$\Leftrightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{CM} = \text{sđ}\overset{\frown}{DM} \Leftrightarrow \widehat{CBM} = \widehat{DBM}$

$\Leftrightarrow BM$ là tia phân giác của góc $\widehat{CBD}$.



❷ Xét hai tam giác $\triangle BDM$ và $\triangle DEM$, Ta có $\widehat{M}$ chung, $\widehat{DBM} = \widehat{EDM}$.
Do đó: $\triangle BDM \sim \triangle DEM \Rightarrow \dfrac{MD}{ME} = \dfrac{MB}{MD} \Leftrightarrow MD^2 = ME \cdot MB$, đpcm.

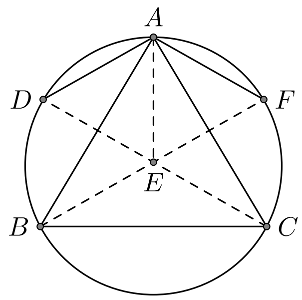
□

BÀI 7. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác của hai góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau ở E và cắt đường tròn ở F và D. Chứng minh rằng tứ giác $EDAF$ là một hình thoi.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Chứng minh $EDAF$ là hình bình hành do có các cặp cạnh đối song song.

❷ Chứng minh $AE \perp DF$ bởi $DF \parallel BC$.
Vậy, $EDAF$ là một hình thoi.



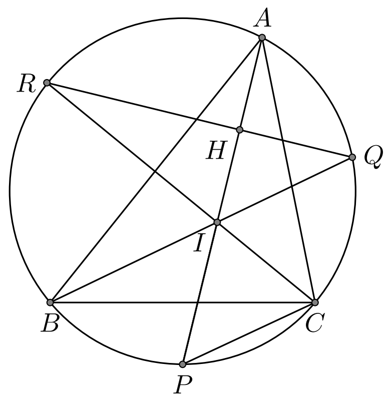
□

BÀI 8. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn. P, Q, R theo thứ tự là các điểm chính giữa của các cung bị chắn BC, CA, AB bởi các góc A, B, C.

❶ Chứng minh $AP \perp QR$.

❷ AP cắt CR tại I. Chứng minh $\triangle CPI$ là tam giác cân.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Gọi K là giao điểm của AP và RQ. Ta có

$$\widehat{AKR} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AR} + \text{sđ}\overset{\frown}{CQ} + \text{sđ}\overset{\frown}{CP}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}\right) = \frac{1}{4}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{BC}\right) = 90^\circ.$$

Vậy, ta được $AP \perp QR$.

❷ Ta có

$$\widehat{CIP} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AR} + \text{sđ}\overset{\frown}{CP}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BR} + \text{sđ}\overset{\frown}{BP}\right) = \widehat{ICP}.$$

Vậy, ta được $\triangle CPI$ cân tại P.

□

BÀI 9. Cho $\triangle ABC$ nhọn và $AB < AC$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AB, BC, CA. Tiếp tuyến tại A của đường tròn cắt các đường thẳng BC và DF lần lượt tại M và N. Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng BC với đường thẳng DF và AE.

❶ Chứng minh rằng $AE \perp DF$.

❷ Chứng minh rằng $MA = MQ, MN = MP$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Trước hết, từ giả thiết "D, E, F lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AB, BC, CA", ta được:

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}, \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}, \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{AF}.$$

❶ Gọi I là giao điểm của AE và DF, ta có ngay:

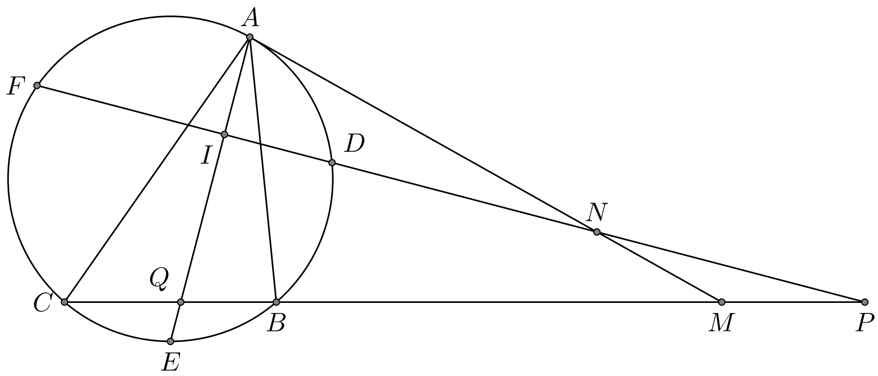
$$\widehat{AID} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{EF}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{EC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CF}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CA}\right) = \frac{1}{4}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CA}\right) = \frac{1}{4}\cdot 360^\circ = 90^\circ.$$

$\Leftrightarrow AE \perp DF$, đpcm.

❷ Xét $\triangle MAQ$ sử dụng định lí về góc tạo bởi tia tiếp tuyến với một dây và góc có đỉnh ở bên trong đường tròn ta có

$$\widehat{MAQ} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AE} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{BE}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{CE}\right) = \widehat{AQM}$$

$$\triangle MAQ \text{ cân tại } M \Leftrightarrow MA = MQ, \text{ đpcm.}$$



Xét $\triangle MNP$, sử dụng định lí về góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn và hai góc đối đỉnh Ta có

$$\widehat{MPN} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{CF} - \text{sđ}\overset{\frown}{BD}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AF} - \text{sđ}\overset{\frown}{AD}\right) = \widehat{ANF} = \widehat{MNP}$$

$\triangle MNP$ cân tại $M \Leftrightarrow MN = MP,$ đpcm.

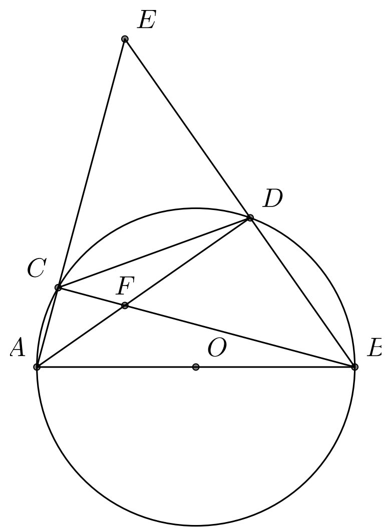
□

BÀI 10. Cho đường tròn (O) đường kính AB, cung $CD = 80^\circ$ nằm cùng phía đối với AB (D thuộc cung BC). Gọi E là giao điểm của AC và BD, F là giao điểm của AD và BC. Tính $\widehat{AEB}, \widehat{AFB}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

$$\widehat{AEB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{CD}\right) = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 90^\circ.$$

$$\widehat{AFB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD}\right) = \frac{180^\circ + 80^\circ}{2} = 130^\circ.$$



□

BÀI 11. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M thuộc tia đối của tia BC. Gọi I là giao điểm của MA với đường tròn Chứng minh rằng:

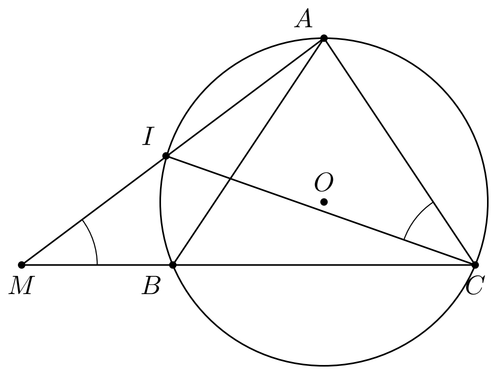
❶ $\widehat{AMC} = \widehat{ACI}$.

❷ $AI \cdot AM = AC^2$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$
$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.

$$\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\overset{\frown}{BI}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{BI}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AI} = \widehat{ACI}.$$



❷ Từ ý a) ta suy ra $\triangle AMC \backsim \triangle ACI$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AC}{AI} \Rightarrow AM \cdot AI = AC^2$.

□

BÀI 12. Cho đường tròn (O), đường kính AB vuông góc với dây CD. Qua điểm M thuộc cung AD, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt CD ở I. Gọi E là giao điểm của BM và CD.

❶ Chứng minh rằng $IM = IE$.

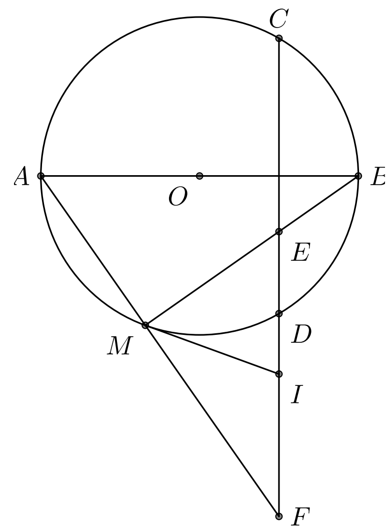
❷ Gọi F là giao điểm của AM và CD. Chứng minh rằng $\widehat{AFC} = \widehat{ABM}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Vì $AB \perp CD$ nên AB là trung trực của CD,
suy ra $BC = BD$. Dẫn đến $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.

$$\widehat{MEI} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{MD} + \text{sđ}\overset{\frown}{BC}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{MD} + \text{sđ}\overset{\frown}{BD}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{MB} = \widehat{EMI}.$$

Suy ra tam giác $\triangle IME$ cân tại I.



❷ M thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
Từ đó suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{AFC}$, vì cùng phụ với góc $\widehat{BAM}$.

□

BÀI 6 CUNG CHỨA GÓC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. CÁCH GIẢI BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

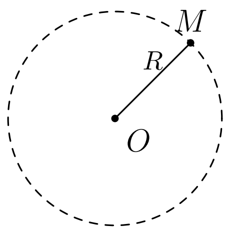
Muốn chứng minh quỹ tích các điểm M thoả mãn tính chất T là một hình $\mathcal{H}$ nào đó, ta trình bày như sau:

Phần thuận: *(Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình $\mathcal{H}$)*: Gọi M là một điểm bất kì có tính chất T, ta chứng minh M thuộc $\mathcal{H}$. Giới hạn (nếu có).

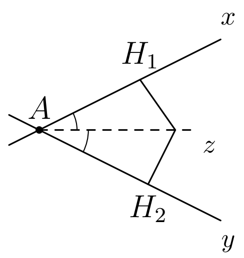
Phần đảo: *(Mọi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ đều có tính chất T)*: Gọi M là một điểm bất kì thuộc hình $\mathcal{H}$, ta đi chứng minh M có tính chất T.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình $\mathcal{H}$.

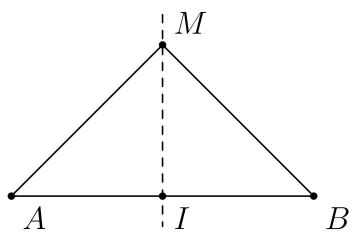
Ta đã học ba quỹ tích cơ bản ở Hình học 7 và một quỹ tích cơ bản ở Hình học 8, cụ thể:

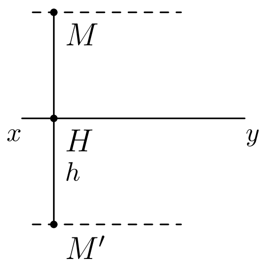


1. *Quỹ tích các điểm cách điểm O cố định một khoảng R không đổi là đường tròn (O, R).*



2. *Quỹ tích các điểm nằm trong cùng một góc cố định và các đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc ấy.*
3. *Quỹ tích các điểm cách đều hai điểm A, B cố định là đường trung trực của AB.*





4. *Quỹ tích các điểm cách đều đường thẳng xy cố định một khoảng h không đổi là hai đường thẳng song song với xy và có khoảng cách đến xy bằng h.*

2. CÁCH GIẢI BÀI TOÁN DỰNG HÌNH

Muốn dựng được điểm M thoả mãn tính chất T, ta đã biết rằng cần trình bày đủ bốn bước:

Phân tích.

Cách dựng.

Chứng minh.

Biện luận.

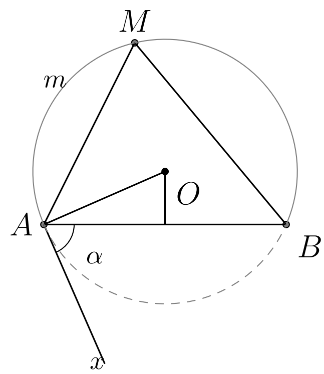
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. TÌM QUỸ TÍCH CÁC ĐIỂM M TẠO THÀNH VỚI HAI MÚT CỦA ĐOẠN THẲNG AB CHO TRƯỚC MỘT GÓC $\widehat{AMB}$ CÓ SỐ ĐO KHÔNG ĐỔI BẰNG α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$

Phương pháp giải:

Phương pháp

Để đơn giản, trước hết ta chỉ xét một nửa mặt phẳng có bờ AB.

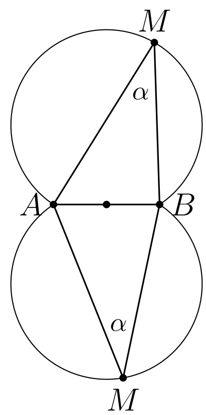


Phần thuận: Gọi M là một điểm thuộc nửa mặt phẳng đang xét thoả mãn $\widehat{AMB} = \alpha$.

Vạch đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác $\triangle MBA$, thì mọi điểm N nằm trên cung AB chứa đỉnh M của góc $\widehat{AMB}$, ta kí hiệu là $\widehat{AmB}$ (cung còn lại kí hiệu là $\widehat{AnB}$) luôn có: $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = \alpha$. Ta cần đi chứng minh đường tròn (O) là xác định không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

Thật vậy, trong nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng đang xét dựng tia Ax sao cho $\widehat{xAB} = \alpha$, suy ra Ax là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow Ax \perp AO$.

Vậy, tâm là giao điểm của đường trung trực AB với tia Ay vuông góc với Ax.



Phần đảo: Với điểm M bất kì thuộc cung $\widehat{AmB}$, ta có: $\widehat{AMB} = \widehat{xAB} = \alpha$. Trên mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng đang xét, ta có một cung đối xứng đối với cung $\widehat{AmB}$ qua AB.

Giới hạn:

— Khi M trùng với A thì góc $\widehat{AMB}$ được thay bởi $\widehat{xAB}$.

— Khi M trùng với B thì góc $\widehat{AMB}$ được thay bởi $\widehat{ABx}$.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M tạo thành với hai nút của đoạn thẳng AB cho trước một góc $\widehat{AMB}$ có số đo không đổi bằng α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$, là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB gọi là cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB.

Nhận xét. *Ta có:*

1. *Hai điểm A và B được coi là thuộc quỹ tích, vì:*
   — *Khi M trùng với A thì góc $\widehat{AMB}$ được thay bởi $\widehat{xAB}$.*

— *Khi M trùng với B thì góc $\widehat{AMB}$ được thay bởi $\widehat{ABx}$.*

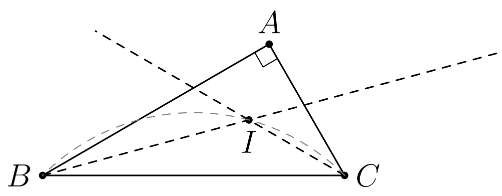
❷ *Quỹ tích các điểm M tạo thành với hai mút của đoạn thẳng AB cho trước một góc vuông là đường tròn đường kính AB.*

VÍ DỤ 1 (Bài 44/tr 86 - Sgk). Cho $\triangle ABC$ vuông ở A, có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích I khi A thay đổi.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phần thuận: Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BIC} &= 180^\circ - \left(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}\right) = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ.\end{aligned}$$



Vì B, C cố định, A thay đổi, I luôn nhìn cạnh BC dưới một góc 135° nên I di chuyển trên cung chứa góc 135° dựng trên BC.

Phần đảo: Lấy điểm I là giao của cung chứa góc 135° dựng trên BC và tia phân giác trong góc $\widehat{ACB}$, ta chứng minh I cũng thuộc tia phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$.

Xét tam giác IBC, ta có

$$\begin{aligned}& \widehat{BIC} + \widehat{ICB} + \widehat{IBC} = 180^\circ\\ \Leftrightarrow\ & 135^\circ + \frac{1}{2}\cdot\widehat{ACB} + \widehat{IBC} = 180^\circ\\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\cdot\left(90^\circ - \widehat{ABC}\right) + \widehat{IBC} = 45^\circ\\ \Leftrightarrow\ & \widehat{ABC} = 2\cdot\widehat{IBC}\end{aligned}$$

Nên BI là phân giác trong của $\triangle ABC$. Hay I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ (I là giao điểm của ba đường phân giác trong).

Giới hạn:

— Khi $I \equiv B$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng (trái giả thiết).

— Khi $I \equiv C$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng (trái giả thiết).

Vậy Quỹ tích điểm I là cung chứa góc 135° dựng trên cạnh BC đối xứng nhau qua BC, bỏ đi điểm B và C.

Kết luận: Quỹ tích điểm I là cung chứa góc 135° dựng trên cạnh BC đối xứng nhau qua BC, bỏ đi điểm B và C. □

VÍ DỤ 2 (Bài 48/tr 87 - Sgk). Cho hai điểm A, B cố định. Từ A vẽ các tiếp tuyến với đường tròn tâm B có bán kính không lớn hơn AB. Tìm quỹ tích các tiếp điểm.

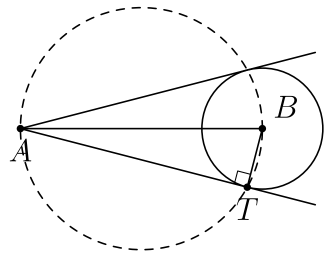
✍ **LỜI GIẢI.**

Phần thuận: Theo tính chất của tiếp tuyến ta có: $AT \perp BT$
Do đó, A, B cố định. T nhìn AB dưới một góc vuông nên T di chuyển trên đường tròn đường kính AB.
Phần đảo: Lấy điểm T thuộc đường tròn đường kính AB.
Khi đó $AT \perp BT$ tại T nên AT là tiếp tuyến của đường tròn tâm B, bán kính $BT \leq AB$.
Giới hạn:

— Khi $T \equiv B$ thì bán kính đường tròn tâm B thoả yêu cầu đề bài là 0 (vô lý).

— Khi $T \equiv A$ thì bán kính đường tròn tâm B thoả yêu cầu đề bài là AB.

Vậy quỹ tích tiếp điểm T là đường tròn đường kính AB bỏ đi điểm B.
Kết luận: Quỹ tích tiếp điểm T là đường tròn đường kính AB bỏ đi điểm B.



□

VÍ DỤ 3. Xét các $\triangle ABC$ có $BC = 6$ cm, cố định, $\widehat{A} = 120°$.

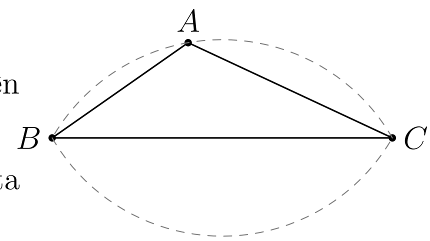
❶ Tìm quỹ tích các điểm A

❷ Điểm A ở vị trí nào thì $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất? Tính giá trị lớn nhất đó.

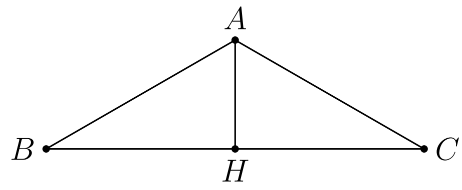
✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Ta thực hiện theo các phần:
Phần thuận: Do BC cố định, $\widehat{BAC} = 120°$ nên A di chuyển trên hai cung chứa góc $120°$ dựng trên BC.
Phần đảo: Lấy điểm A thuộc cung chứa góc $120°$ dựng trên BC, ta thấy ngay $\widehat{BAC} = 120°$.
Giới hạn: Khi A trùng với B, C thì ba điểm A, B, C thẳng hàng (trái giả thiết).
Vậy quỹ tích các điểm A là hai cung chứa góc $120°$ dựng trên đoạn BC, bỏ đi điểm B, C.
Kết luận: Quỹ tích các điểm A là hai cung chứa góc $120°$ dựng trên đoạn BC, bỏ đi điểm B, C.



❷



Hạ AH vuông góc với BC, ta có ngay:
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$
Do đó, $S_{\triangle ABC}$ có giá trị nhỏ nhất khi AH lớn nhất
$\Leftrightarrow A$ là điểm ở chính giữa cung chứa góc.
Khi đó, xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có
$\widehat{BAH} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABH} = 30^\circ \Rightarrow AB = 2AH$
Xét tam giác ABH ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2$
$\Leftrightarrow (2AH)^2 = AH^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3AH^2 = 9$
$\Leftrightarrow AH = \sqrt{3}$.
Do đó $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$ cm^2.

□

Nhận xét. *Trong ví dụ trên, việc chỉ ra quỹ tích của điểm A được suy ra ngay từ giả thiết, do đó các bước thực hiện là rất đơn giản. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp chúng ta cần chỉ ra được cung chứa góc trong hình vẽ.*

VÍ DỤ 4. Cho nửa đường tròn đường kính AB và cung EF của nửa đường tròn (E nằm trên cung AF sao cho sđ $\overset{\frown}{EF} = 60^\circ$. Hai tia AE và BF cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích các điểm M khi cung $\overset{\frown}{EF}$ chuyển động trên nửa đường tròn.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phần thuận: Giả sử có điểm M sao cho $\overset{\frown}{EF} = 60^\circ$, ta có:

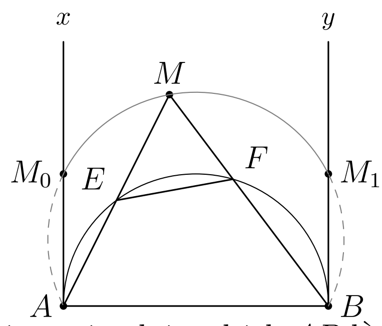
$$\widehat{AMB} = \frac{\text{sđ } \overset{\frown}{AB} - \text{sđ } \overset{\frown}{EF}}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Vậy điểm M nằm trên cung chứa góc 60° dựng trên đoạn thẳng AB (cung này thuộc mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn cho trước).

Giới hạn: Ta có:

— Nếu $E \equiv A \Rightarrow M \equiv M_0$, với M_0 là giao điểm của cung chứa góc với tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn đường kính AB.

— Nếu $F \equiv B \Rightarrow M \equiv M_1$, với M_1 là giao điểm của cung chứa góc với tiếp tuyến By của nửa đường tròn đường kính AB. Do đó, điểm M chỉ nằm trên cung $\overset{\frown}{M_0M_1}$.



Phần đảo: Lấy điểm M nằm trên cung $\overset{\frown}{M_0M_1}$. Nối MA, MB cắt nửa đường tròn đường kính AB lần lượt tại E và F. Ta phải chứng minh số đo $\overset{\frown}{EF} = 60^\circ$.

Thật vậy: $\widehat{AMB} = \frac{\text{sđ } \overset{\frown}{AB} - \text{sđ } \overset{\frown}{EF}}{2} \Rightarrow \text{sđ } \overset{\frown}{EF} = \text{sđ } \overset{\frown}{AB} - 2\widehat{AMB} = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M là cung $\overset{\frown}{M_0M_1}$ của cung chứa góc 60° dựng trên đoạn thẳng AB (cung này thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn đã cho). □

Nhận xét. *Phương pháp giải bài toán trên được tổng quát cho yêu cầu sđ* $\overset{\frown}{EF} = \alpha$, *với* $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

🗀 DẠNG 2. DỰNG CUNG CHỨA GÓC α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ TRÊN ĐOẠN THẲNG $AB = a$ CHO TRƯỚC

Phương pháp giải:

Phương pháp

Ta lần lượt thực hiện:

— Dựng đoạn $AB = a$ và đường trung trực Iz của AB.

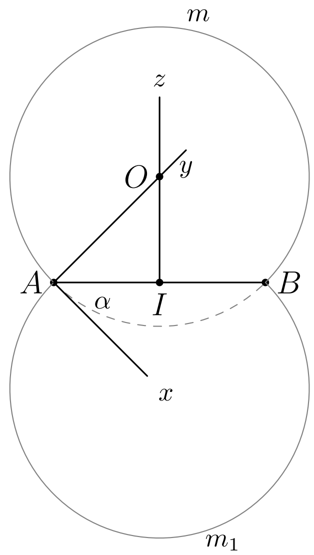
— Dựng tia Ax sao cho $\widehat{xAB} = \alpha$.

— Dựng tia Ay vuông góc với tia Ax cắt Iz tại O.

— Dựng đường tròn (O, OA) và chỉ lấy phần cung cùng phía với O, kí hiệu là $\overset{\frown}{AmB}$.

— Lấy đối xứng cung $\overset{\frown}{AmB}$ qua AB được cung $\overset{\frown}{Am_1B}$.

Vậy, hai cung $\overset{\frown}{AmB}$ và $\overset{\frown}{Am_1B}$ là cung chứa góc cần dựng.



Nhận xét. ❶ *Như vậy, nếu chỉ với yêu cầu dựng cung chứa góc chúng ta chỉ cần trình bày phần cách dựng. Tuy nhiên với bài toán sử dụng cung chứa góc để dựng hình (ví dụ như dựng tam giác...) chúng ta cần trình bày đủ bốn bước.*

❷ *Trong trường hợp đặc biệt với $\alpha = 90^\circ$, chúng ta đã biết được cách dựng đơn giản hơn nhiều, đó là đường tròn đường kính AB.*

VÍ DỤ 1. Dựng cung chứa góc 60° trên đoạn $AB = 4$ cm

✍ LỜI GIẢI.

Ta lần lượt thực hiện:

— Dựng đoạn $AB = 4cm$ và đường trung trực Iz của AB.

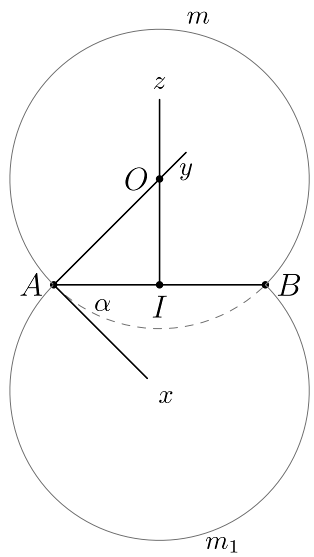
— Dựng tia Ax sao cho $\widehat{xAB} = 60^\circ$.

— Dựng tia Ay vuông góc với Ax cắt Iz tại O.

— Dựng đường tròn (O, OA) và chỉ lấy phần cung cùng phía với O, kí hiệu là $\overset{\frown}{AmB}$.

— Lấy đối xứng cung $\overset{\frown}{AmB}$ qua AB được cung $\overset{\frown}{Am_1B}$.

Vậy, hai cung $\overset{\frown}{AmB}$ và $\overset{\frown}{Am_1B}$ là cung chứa góc cần dựng.



□

VÍ DỤ 2 (Bài 49/tr 87 - Sgk). Dựng $\triangle ABC$, biết $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 40^\circ$ và đường cao $AH = 4$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phân tích:

— Giả sử dựng được $\triangle ABC$ thoả mãn điều kiện: $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 40^\circ$, $AH = 4$ cm.

— Khi đó, điểm A nằm ngoài đường thẳng d song song với đường tròn BC và cách BC 4 cm.

— Mặt khác, $\widehat{BAC} = 40^\circ$ nên A nằm trên cung chứa góc 40° dựng trên BC.

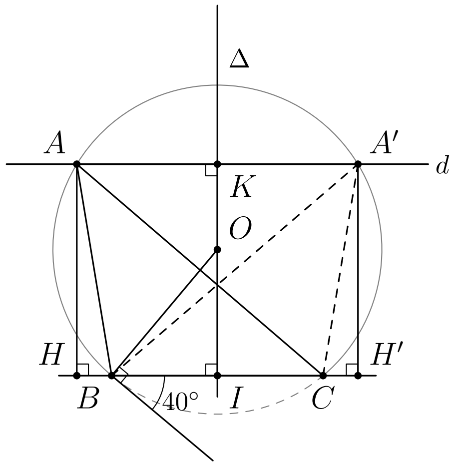
Cách dựng:

— Dựng đoạn thẳng $BC = 6$ cm.

— Dựng cung chứa góc 40° trên đoạn thẳng BC.

— Dựng đường thẳng d song song với BC và cách BC một khoảng bằng 4 cm, như sau: Dựng đường trung trực (Δ) của BC, gọi I là giao điểm của (Δ) với BC, trên (Δ) lấy điểm K sao cho $IK = 4$ cm.
Dựng đường thẳng d vuông góc với (Δ) tại K.

— Gọi giao điểm của (d) và cung chứa góc là A và A'. Khi đó, hai tam giác ABC và $A'BC$ đều thoả mãn yêu cầu bài toán.



Chứng minh:

— Ta có ngay $BC = 6$ cm vì theo cách dựng.

— Các góc $\widehat{A}$ và $\widehat{A'}$ đều bằng 40° do A, A' nằm trên cung chứa góc 40° dựng trên đoạn BC.

— Các hình $AHIK$ và $A'HIK$ là các hình chữ nhật nên $AH = A'H = IK = 4$ cm.

Biện luận: Ta dựng được hai tam giác ABC và $A'BC$ thoả điều kiện đề bài nhưng hai tam giác này bằng nhau (đối xứng nhau qua IK) nên bài toán chỉ có một nghiệm hình. □

VÍ DỤ 3. Dựng $\triangle ABC$ biết $BC = a$, $\widehat{A} = \alpha$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ và đường cao $BH = h$ với $h < a$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Phân tích: Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ thoả mãn điều kiện đầu bài, ta thấy:

❶ Cạnh $BC = a$ dựng được ngay.

❷ Điểm H thoả mãn hai điều kiện:

— H nằm trên đường tròn đường kính BC.

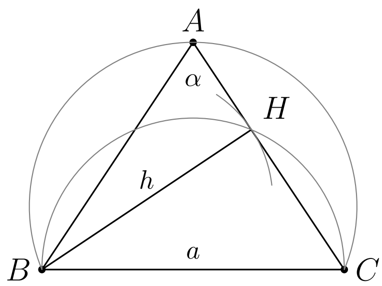
— H nằm trên đường tròn (B, h).

Vậy H là giao điểm của hai đường tròn đó.

❸ Điểm A thoả mãn hai điều kiện:

— A nằm trên cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng BC.

— A nằm trên tia CH.



Vậy A là giao điểm của tia CH với cung chứa góc α.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

— Dựng đoạn $BC = a$.

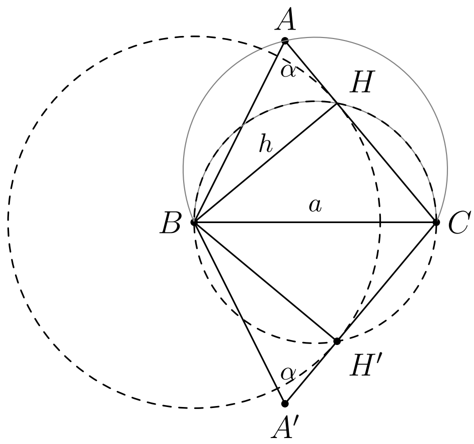
— Dựng cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng BC.

— Dựng đường tròn đường kính BC.

— Dựng đường tròn (B, h) cắt đường tròn đường kính BC tại H.

— Tia CH cắt cung chứa góc α tại A.

— Nối AB ta được $\triangle ABC$ phải dựng.



Chứng minh: Ta có ngay:

— $BC = a$ theo cách dựng.

— $\widehat{A} = \alpha$ vì A nằm trên cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng BC.

— $BH = h$ vì H thuộc đường tròn (B, h).

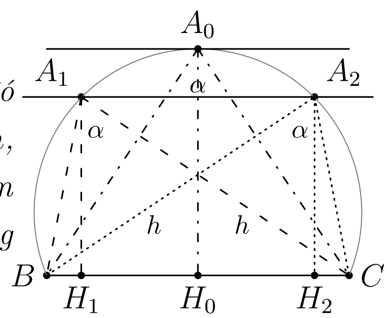
— $\widehat{BHC} = 90^\circ \Rightarrow BH = h$ là đường cao của $\triangle ABC$.

Vậy, ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài. □

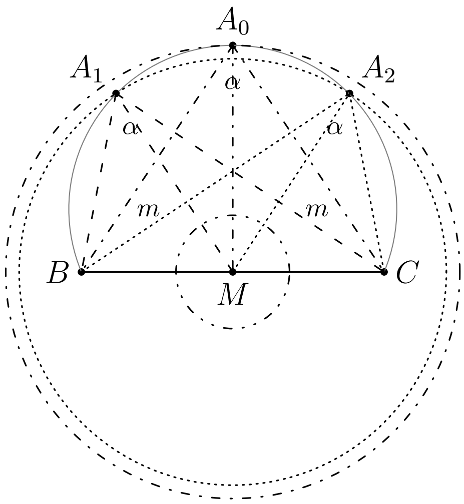
Biện luận: Ta dựng được hai $\triangle ABC$ và $\triangle A'BC$ thảo mãn điều kiện đề bài, nhưng hai tam giác này bằng nhau (đối xứng qua BC) nên bài toán chỉ có một nghiệm hình (bài toán này là bài toán dựng hình về kích thước).

Nhận xét. ❶ *Qua ví dụ trên ta thấy giải một bài toán dựng hình thường được quy về việc xác định một điểm thoả mãn hai điều kiện. Điểm cần xác định là giao của hai quỹ tích (cũng có khi là giao của một quỹ tích với một đường thẳng hoặc một đường tròn cho trước). Số nghiệm hình của bài toán phụ thuộc vào số giao điểm của hai quỹ tích. Phương pháp dựng hình như vậy gọi là phương pháp quỹ tích tương giao.*

❷ *Nếu thay giả thiết đường cao $BH = h$ bằng đường cao $AH = h$, khi đó A thuộc đường thẳng song song với BC và cách BC một khoảng bằng h, và trong trường hợp này bài toán có thể vô nghiệm hình, có một nghiệm hình hoặc hai nghiệm hình, vì nó phụ thuộc vào số giao điểm của đường thẳng với cung chứa góc.*



❸ *Nếu thay giả thiết đường cao $BH = h$ bằng đường trung tuyến $AM = m$, khi đó A thuộc đường tròn (M, m) với M là trung điểm BC, và trong trường hợp này bài toán có thể vô nghiệm hình, vì nó phụ thuộc vào số giao điểm của đường tròn với cung chứa góc.*



DẠNG 3. SỬ DỤNG QUỸ TÍCH CUNG CHỨA GÓC CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp giải:

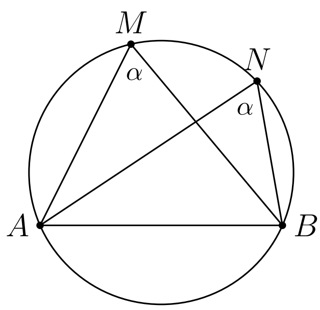
Phương pháp

Việc sử dụng quỹ tích cung chứa góc α để chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn, dựa trên nhận xét:

"Nếu các điểm M, N nằm cùng phía đối với AB và $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ thì bốn điểm A, M, N, B cùng thuộc một đường tròn".

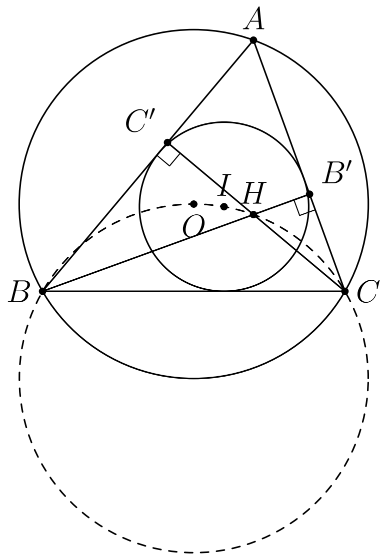
⚠ *Điều kiện cùng phía của các điểm M, N đối với AB là bắt buộc, bởi trong các trường hợp khác chỉ đúng với*

$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$.



VÍ DỤ 1 (Bài 51/tr 87 - Sgk). Cho I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC với $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi H là giao điểm của các đường cao BB' và CC'. Chứng minh các điểm B, C, O, H, I cùng thuộc một đường tròn.

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét tứ giác $AB'HC'$, ta có
$\widehat{B'HC'} = 360^\circ - \left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}\right) = 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 120^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{B'HC'} = 120^\circ$.
Xét $\triangle BIC$, ta có

$$\begin{aligned} \widehat{BIC} &= 180^\circ - \left(\widehat{BIC} + \widehat{ICB}\right) = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{A}\right) = 120^\circ. \end{aligned}$$

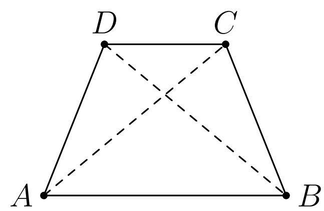
Như vậy, H và I đều nằm trên cung chứa góc 120° dựng trên BC.
Mặt khác, $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O nên góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ trong đường tròn (O) có số đo là
$60^\circ = \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot \text{sđ } \overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$.
Vậy, O nằm trên cung chứa góc 120° dựng trên BC.
Nghĩa là 5 điểm B, C, O, I, H nằm trên cùng một đường tròn chứa cung chứa góc 120° dựng trên BC.

□

VÍ DỤ 2. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:



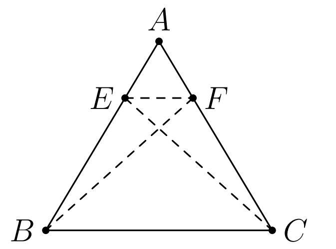
Cách 1: Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle BAC$, ta có:
AB chung
$\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$, vì $ABCD$ là hình thang cân
$AD = BC$, vì $ABCD$ là hình thang cân
Do đó:
$\triangle ABD = \triangle BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.
Vậy, các điểm C, D nằm cùng phía đối với AB và thoả mãn $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
Cách 2: Xét hai tam giác $\triangle ACD$ và $\triangle BDC$, ta có:
CD chung
$\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$, vì $ABCD$ là hình thang cân
$AD = BC$, vì $ABCD$ là hình thang cân
Do đó:
$\triangle ACD = \triangle BDC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$.
Vậy, các điểm A, B nằm cùng phía đối với CD và thoả mãn $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. □

Nhận xét: Đường tròn đi qua bốn đỉnh của hình thang $ABCD$ được gọi là *"Đường tròn ngoại tiếp ABCD"* hoặc *"Hình thang ABCD nội tiếp đường tròn này"*.

VÍ DỤ 3. Cho ΔABC cân tại A. Lấy hai điểm E, F theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho $AE = AF$. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có thể trình bày theo các cách sau:



*Cách 1:*Xét hai tam giác ΔABF và ΔACE, ta có:
$AB = AC$, vì ΔABC cân tại A
$\widehat{A}$ chung
$AE = AF$, giả thiết
Do đó: $\Delta ABF = \Delta ACE$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{ACE} \Leftrightarrow \widehat{EBF} = \widehat{FCE}$.
Vậy các điểm B, C nằm phía dưới đối với EF và thoả mãn $\widehat{EBF} = \widehat{FCE}$ nên bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Cách 2: Chứng minh như trong cách 1, ta được:
$\Delta ABF = \Delta ACE$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AEC}$
$\Leftrightarrow 180^\circ - \widehat{AFB} = 180^\circ - \widehat{AEC} \Leftrightarrow \widehat{CFB} = \widehat{BEC}$.
Vậy, các điểm B, C nằm cùng phía đối với EF và thoả mãn $\widehat{EBF} = \widehat{FCE}$ nên bốn điểm B, C, E, F thuộc cùng một đường tròn.
Cách 3: Xét hai tam giác ΔEBC và ΔFCB, ta có:
$EB = AB = AE = AC - AF = FC$, vì ΔABC cân tại A
$\widehat{EBC} = \widehat{FCB}$, vì ΔABC cân tại A
BC chung
Do đó: $\Delta EBC = \Delta FCB$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{CFB}$.
Vậy, các điểm E, F nằm cùng phía đối với BC và thoả mãn $\widehat{BEC} = \widehat{CFB}$ nên bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn. □

🗀 DẠNG 4. TOÁN TỔNG HỢP

Phương pháp giải:

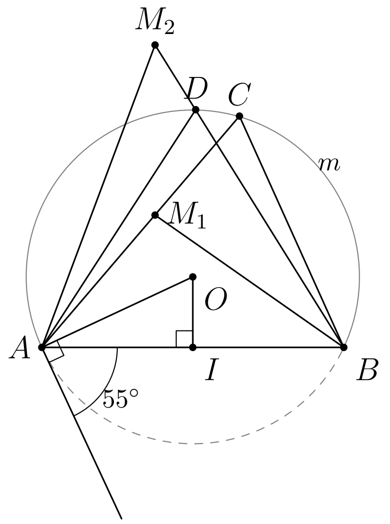
VÍ DỤ 1 (Bài 47/tr 86 - Sgk). Gọi cung chứa góc 55° ở bài tập 46 là $\overset{\frown}{AmB}$. Lấy điểm M_1 nằm bên trong và điểm M_2 nằm bên ngoài đường tròn chứa cung này sao cho M_1, M_2 và cung $\overset{\frown}{AmB}$ nằm cùng một phía đối với đường thẳng AB. Chứng minh rằng:

1. $\widehat{AM_1B} > 55^\circ$
2. $\widehat{AM_2B} < 55^\circ$

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Điểm M_1 nằm trong đường tròn chứa cung $\overset{\frown}{AmB}$.
Đường thẳng AM_1 cắt cung $\overset{\frown}{AmB}$ tại C.
Nối B và C.
Ta có $\widehat{AM_1B} = \widehat{ACB} + \widehat{CBM_1} > \widehat{ACB} = 55°$.

❷ Điểm M_2 nằm ngoài đường tròn chứa cung $\overset{\frown}{AmB}$.
Gọi D là giao điểm của M_2B với cung $\overset{\frown}{AmB}$.
Nối A với D.
Ta có $\widehat{AM_2B} + \widehat{M_2AD} = \widehat{ADB} = 55°$
$\Rightarrow \widehat{AM_2B} < 55°$.



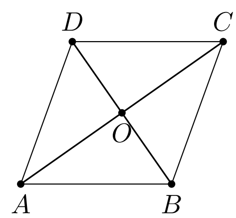
□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho các hình thoi $ABCD$ có cạnh AB cố định. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $\widehat{AOB} = 90°$. Do AB cố định nên O chạy trên đường tròn đường kính AB.



□

BÀI 2. Xét các tam giác ABC có $BC = 2$ cm cố định và $\widehat{A} = 60°$.

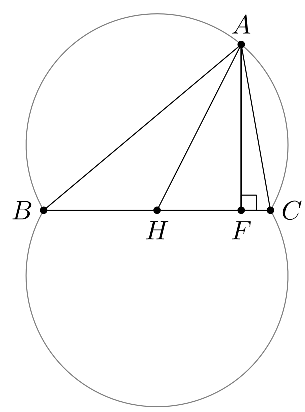
❶ Tìm quỹ tích các điểm A.

❷ Điểm A ở vị trí nào thì diện tích $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất? Tính giá trị lớn nhất đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Vì $BC = 2$ cm và $\widehat{BAC} = 60°$ nên quỹ tích các điểm A là cung chứa góc nhìn BC dưới một góc 60°.

❷ Gọi AF là đường cao hạ từ A xuống BC và H là trung điểm BC. Khi đó
$$S_{\triangle ABC} = \frac{AF \cdot BC}{2} \leq \frac{AH \cdot BC}{2}.$$
Vậy diện tích $\triangle ABC$ lớn nhất khi A là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$. Khi đó $\triangle ABC$ là tam giác đều có cạnh bằng 2 cm, do đó diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng $\dfrac{\sqrt{3} \cdot 2^2}{4} = \sqrt{3}$ cm^2.



□

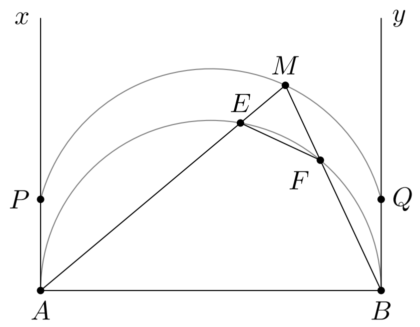
BÀI 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB và cung EF của nửa đường tròn (E nằm trên cung $\overset{\frown}{AF}$ sao cho sđ$\overset{\frown}{EF} = 30^\circ$). Hai tia AE và BF cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích điểm M khi cung $\overset{\frown}{EF}$ chuyển động trên nửa đường tròn.

✍ **LỜI GIẢI.**

— Phần thuận:

Giả sử có điểm M sao cho sđ$\overset{\frown}{EF} = 30^\circ$, khi đó

$$\widehat{AMB} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{EF}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$



Vậy điểm M nằm trên cung chứa góc 75° dựng trên đoạn AB (cung này thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn cho trước).

— Giới hạn:

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến Ax, By (của nửa đường tròn đường kính AB với cung chứa góc chứa điểm M).

- Nếu $E \equiv A$ thì $M \equiv P$;
- Nếu $F \equiv B$ thì $M \equiv Q$.

Vậy điểm M chỉ nằm trên cung $\overset{\frown}{PQ}$.

— Phần đảo:

Lấy điểm M trên cung $\overset{\frown}{PQ}$. Nối MA, MB cắt nửa đường tròn đường kính AB lần lượt tại E, F. Ta có

$$\widehat{AMB} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{EF}}{2} \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{EF} = \text{sđ}\overset{\frown}{AB} - 2\widehat{AMB} = 30^\circ.$$

— Kết luận: quỹ tích điểm M chỉ nằm trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ (cung này thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn cho trước).

□

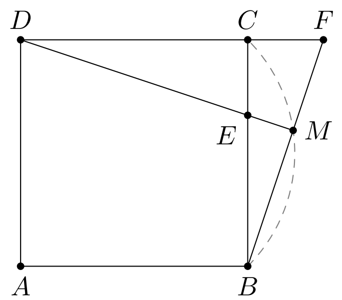
BÀI 4. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm E, trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho $CE = CF$. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF. Tìm quỹ tích điểm M khi E di động trên cạnh BC.

✍ **LỜI GIẢI.**

— Phần thuận:

Xét hai tam giác vuông $\triangle BCF$ và $\triangle DCE$ có $BC = CD$ (do $ABCD$ là hình vuông) và $CE = CF$ (gt) nên $\triangle BCF = \triangle DCE$, do đó $\widehat{CBF} = \widehat{CDE}$.

Mà $\widehat{BEM} = \widehat{CED}$ (đối đỉnh) nên



$$90^\circ = \widehat{CDE} + \widehat{CED} = \widehat{CBF} + \widehat{BEM} \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^\circ.$$

Vậy điểm M nằm trên đường tròn đường kính BD.

— Giới hạn:

- Nếu $E \equiv B$ thì $M \equiv B$;
- Nếu $E \equiv C$ thì $M \equiv C$.

Vậy điểm M chỉ nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn đường kính BD.

— Phần đảo:

Lấy điểm M trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn đường kính BD. Nối MB, MD lần lượt cắt CD, BC tại F, E.

Ta có $\widehat{BMD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $\triangle BCF = \triangle DCE$ (g.c.g), do đó $CF = CE$.

— Kết luận: quỹ tích điểm M nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn đường kính BD.

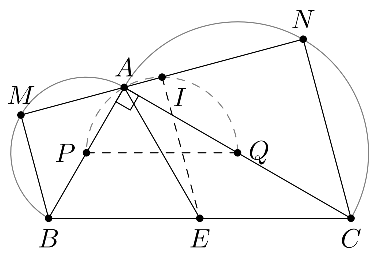
□

BÀI 5. Cho tam giác ABC vuông ở A. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ra phía ngoài của tam giác. Qua A vẽ cát tuyến MAN (M thuộc nửa đường tròn đường kính AB, N thuộc nửa đường tròn đường kính AC).

❶ Tứ giác $BCNM$ là hình gì?

❷ Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN khi cát tuyến MAN quay quanh A.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Vì M, N lần lượt nằm trên nửa đường tròn đường kính AB, AC nên $\widehat{BMA} = \widehat{CNA} = 90^\circ$.

Do đó $BM \perp MN$, $CN \perp MN \Rightarrow BCNM$ là hình thang vuông (tại M, N).

❷ Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN:

— Phần thuận:

Gọi E là trung điểm $BC \Rightarrow IE$ là đường trung bình của hình thang $BCNM \Rightarrow EI \perp MN$, do đó $\widehat{AIC} = 90^\circ$.

Vậy điểm M nằm trên đường tròn đường kính AE.

— Giới hạn:

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC. Ta có $APEQ$ là hình chữ nhật nên P, Q cùng nằm trên đường tròn đường kính AE.

- Nếu $M \equiv B$ thì $I \equiv P$;
- Nếu $M \equiv C$ thì $I \equiv C$.

Vậy điểm M chỉ nằm trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đường kính AE.

— Phần đảo:

Lấy điểm I trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đường kính AE. Nối AI lần lượt cắt $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ tại M, N.

Ta có $\widehat{AIE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $EI \perp MN \Rightarrow EI \parallel BM$, do đó EI là đường trung bình của hình thang $BCNM \Rightarrow MI = NI$.

— Kết luận: quỹ tích điểm I nằm trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đường kính AE.

□

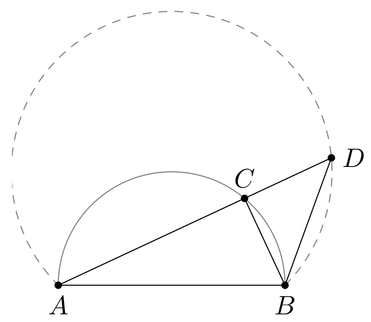
BÀI 6. Cho nửa đường tròn đường kính AB cố định và điểm C di chuyển trên nửa đường tròn. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ tam giác BCD vuông cân tại C. Tìm quỹ tích điểm D.

✍ **LỜI GIẢI.**

— Phần thuận:

Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ nên $A,\ C,\ D$ thẳng hàng.

Vì tam giác BCD vuông cân tại C nên $\widehat{ADB} = 45^\circ$, do đó điểm D nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB (cung này thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn cho trước).



— Giới hạn:

- Nếu $C \equiv B$ thì $D \equiv B$;
- Nếu $C \equiv A$ thì $D \equiv A$.

Vậy điểm D nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB.

— Phần đảo:

Lấy điểm D trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB. Nối AD nửa đường tròn AB tại C.

Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $\widehat{ADB} = 45^\circ$ nên $\triangle BCD$ vuông cân tại C, do đó $CB = CD$.

— Kết luận: quỹ tích điểm D nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên dây AB.

□

BÀI 7. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AC lấy một điểm D, trên dây BD lấy điểm M sao cho $DM = CD$.

❶ Chứng minh tam giác MCD là tam giác đều.

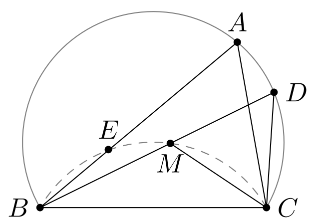
❷ Tìm quỹ tích điểm M khi điểm D di động trên cung nhỏ AC.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Vì $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{BDC} = 60^\circ$.

Do đó tam giác MDC đều (vì $DM = DC$).

❷ Tìm quỹ tích điểm M:



— Phần thuận:

Vì $\triangle MDC$ đều nên $\widehat{BMC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, do đó điểm M chạy trên cung chứa góc 120° dựng trên đoạn BC.

— Giới hạn:

Gọi E là giao điểm của AB và cung chứa góc 120° dựng trên đoạn BC.

- Nếu $D \equiv A$ thì $M \equiv E$;
- Nếu $D \equiv C$ thì $M \equiv C$.

Vậy điểm M chỉ nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{CE}$ của cung chứa góc 120° dựng trên đoạn BC.

— Phần đảo:

Lấy điểm M trên cung nhỏ $\overset{\frown}{EC}$ của cung chứa góc 120° dựng trên đoạn BC. Nối BM cắt (O) tại D.

Ta có $\widehat{BMC} = 120^\circ$ (góc nội tiếp) nên $\widehat{CMD} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Mà $\widehat{BDC} = 60^\circ$ nên $\triangle MCD$ đều, do đó $DC = DM$.

— Kết luận: quỹ tích điểm M nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{CE}$ của cung chứa góc 120° dựng trên đoạn BC.

□

BÀI 8. Cho cung một phần tư đường tròn với hai bán kính OA, OB vuông góc với nhau. Trên cung này lấy một điểm C tùy ý không trùng với A và B. Vẽ CH vuông góc với OA. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HOC.

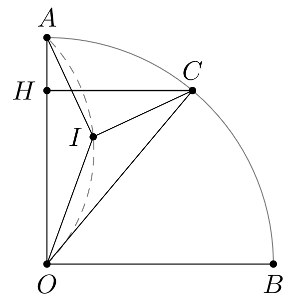
❶ Chứng minh rằng $\triangle AIO = \triangle CIO$.

❷ Tìm quỹ tích điểm I khi điểm C di động trên cung AB.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Xét hai tam giác AIO và CIO có
$OA = OC$, OI chung và $\widehat{AOI} = \widehat{CIO}$
nên $\triangle AIO = \triangle CIO$ (c.g.c).

❷ Tìm quỹ tích điểm I khi điểm C di động trên cung AB.



— Phần thuận:
Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{AIO} &= \widehat{CIO} = 180^\circ - (\widehat{IOC} + \widehat{ICO}) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{HOC} + \widehat{HCO}) \\ &= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.\end{aligned}$$

Vì A, O cố định nên quỹ tích điểm I nằm trên cung 135° dựng trên đoạn AO.

— Giới hạn:
Vì C chỉ chạy trên cung $\widehat{AB}$ nên điểm I chỉ chạy trên cung chứa góc 135° dựng trên đoạn AO thuộc nửa mặt phẳng bờ AO có chứa điểm B.

— Phần đảo:
Lấy điểm I trên cung chứa góc 135° dựng trên đoạn AO. Dựng OC sao cho OI là tia phân giác góc $\widehat{AOC}$ (C nằm trên cung $\widehat{AB}$), từ C hạ $CH \perp OA$.
Vì $\widehat{CIO} = \widehat{AIO} = 135^\circ$ nên $\widehat{CIA} = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ$, do vậy C, I, H, A cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra $\widehat{ICH} = \widehat{IAH} = \widehat{ICO} \Rightarrow IC$ là tia phân giác góc $\widehat{OCH}$, vì vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác COH.

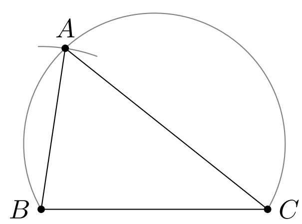
— Kết luận: quỹ tích điểm I là cung chứa góc 135° dựng trên đoạn AO thuộc nửa mặt phẳng bờ AO có chứa điểm B.

□

BÀI 9. Dựng tam giác ABC biết $BC = 3$ cm, $\widehat{A} = 50^\circ$ và $AB = 2$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Phân tích:



Giả sử ta dựng được tam giác ABC thỏa mãn đề bài, ta có

— $BC = 3$ cm nên dựng được ngay;

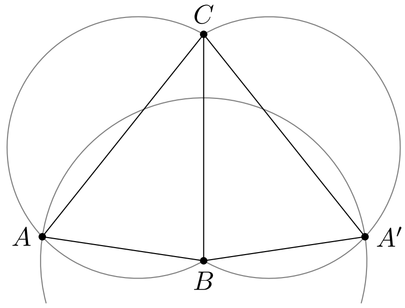
— Điểm A thỏa mãn

+) Góc $\widehat{BAC} = 50^\circ$ nên A nằm trên cung chứa góc 50° dựng trên cạnh BC;

+) Đoạn $AB = 2$ cm nên A nằm trên đường tròn $(B; 2 \text{ cm})$.

Do đó điểm A là giao điểm của hai hình trên.

❷ Cách dựng:



— Dựng đoạn $BC = 3$ cm;

— Dựng cung chứa góc 50° trên đoạn BC;

— Dựng đường tròn $(B; 2 \text{ cm})$ cắt cung chứa góc ở trên tại A;

— Nối AB, AC ta được tam giác ABC.

❸ Chứng minh:

— Ta có $BC = 3$ cm (cách dựng);

— $\widehat{A} = 50^\circ$;

— $AB = 2$ cm (do A nằm trên $(B; 2 \text{ cm})$).

❹ Biện luận:

Ta dựng được hai tam giác ABC và $A'BC$ (đối xứng nhau qua BC) thỏa mãn yêu cầu đề bài. Do hai tam giác này bằng nhau nên ta chỉ có một nghiệm hình (do đây là bài toán dựng hình về kích thước).

□

BÀI 10. Dựng tam giác ABC biết

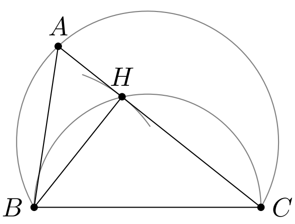
❶ $BC = 4$ cm, $\widehat{A} = 60^\circ$ và đường cao $BH = 3$ cm.

❷ $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 45^\circ$ và đường cao $BH = 4$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $BC = 4$ cm, $\widehat{A} = 60^\circ$ và đường cao $BH = 3$ cm.

1) Phân tích:



Giả sử ta dựng được tam giác ABC thỏa mãn đề bài, ta có

— $BC = 4$ cm nên dựng được ngay;

— Điểm H thỏa mãn

+) nằm trên đường tròn đường kính BC;

+) nằm trên đường tròn $(B; 3 \text{ cm})$.

Do đó điểm H là giao điểm của hai hình trên.

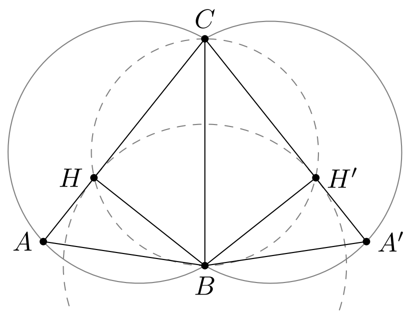
— Điểm A thỏa mãn

+) $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên A nằm trên cung chứa góc 60° dựng trên cạnh BC;

+) A nằm trên tia CH.

Do đó điểm A là giao điểm của tia CH và cung chứa góc 60°.

2) Cách dựng:



— Dựng đoạn $BC = 4$ cm;

— Dựng cung chứa góc 60° trên đoạn BC;

— Dựng đường tròn đường kính BC;

— Dựng đường tròn $(B; 3 \text{ cm})$ cắt đường tròn đường kính BC tại H;

— Tia CH cắt cung chứa góc 60° (ở trên) tại A;

— Nối AB ta được tam giác ABC cần dựng.

3) Chứng minh:

Ta có

— $BC = 4$ cm (cách dựng);

— $\widehat{A} = 60^\circ$ vì nằm trên cung chứa góc 60° trên đoạn BC;

— $BH = 3$ cm vì H nằm trên đường tròn $(B; 3 \text{ cm})$;

— $\widehat{BHC} = 90^\circ$ vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Vậy tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4) Biện luận:

Ta dựng được hai tam giác ABC và $A'BC$ (đối xứng nhau qua BC) thỏa mãn yêu cầu đề bài. Do hai tam giác này bằng nhau nên ta chỉ có một nghiệm hình (do đây là bài toán dựng hình về kích thước).

❷ Tương tự câu a).

□

BÀI 11. Dựng tam giác ABC biết

❶ $BC = 8$ cm, $\widehat{A} = 60^\circ$ và đường cao $AH = 6$ cm.

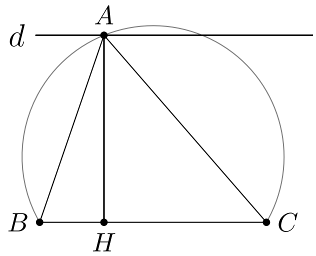
❷ $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 120^\circ$ và đường cao $AH = \sqrt{3}$ cm.

❸ $BC = 4$ cm, $\widehat{A} = 60^\circ$ và đường cao $AH = 9$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $BC = 8$ cm, $\widehat{A} = 60^\circ$ và đường cao $AH = 6$ cm.

1) Phân tích:



Giả sử ta dựng được tam giác ABC thỏa mãn đề bài, ta có

— $BC = 8$ cm nên dựng được ngay;

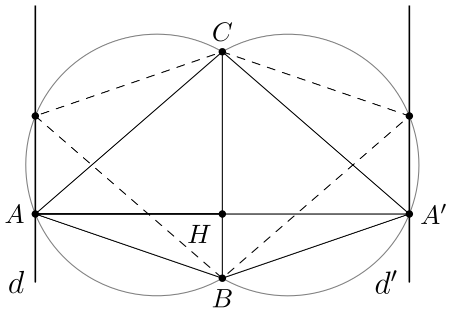
— Điểm A thỏa mãn

+) $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên A nằm trên cung chứa góc 60° dựng trên cạnh BC;

+) $AH = 6$ cm nên điểm A nằm đường thẳng d cách BC một khoảng 6 cm.

Do đó điểm A là giao điểm của d và cung chứa góc 60°.

2) Cách dựng:



— Dựng đoạn $BC = 8$ cm;

— Dựng cung chứa góc 60° trên đoạn BC;

— Dựng đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng 6 cm;

— Đường thẳng d cắt cung chứa góc 60° (ở trên) tại A;

— Nối AB, AC ta được tam giác ABC cần dựng.

3) Chứng minh:

Ta có

— $BC = 8$ cm (cách dựng);

— $\widehat{A} = 60^\circ$ vì nằm trên cung chứa góc 60° trên đoạn BC;

— $AH = 6$ cm vì H nằm trên đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng 6 cm.

Vậy tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán.

4) Biện luận:

Vì d cắt cung chứa góc 60° dựng trên đoạn BC tại hai điểm phân biệt nên bài toán có hai nghiệm hình.

Chú ý: hai tam giác ABC và $A'BC$ (đối xứng nhau qua BC) thỏa mãn yêu cầu đề bài. Do hai tam giác này bằng nhau nên hai tam giác này chỉ cho ta một nghiệm hình (do đây là bài toán dựng hình về kích thước).

❷ Tương tự câu a).

❸ Tương tự câu a).

□

BÀI 12. Dựng tam giác ABC biết

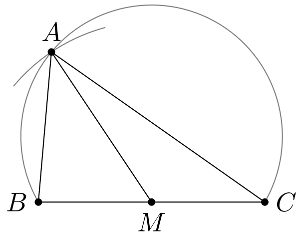
❶ $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 45^\circ$ và trung tuyến $AM = 5$ cm.

❷ $BC = 4$ cm, $\widehat{A} = 60^\circ$ và trung tuyến $AM = 2\sqrt{3}$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 45^\circ$ và trung tuyến $AM = 5$ cm.

1) Phân tích:



Giả sử ta dựng được tam giác ABC thỏa mãn đề bài, ta có

— $BC = 6$ cm nên dựng được ngay;

— Điểm M là trung điểm của BC nên dựng được ngay;

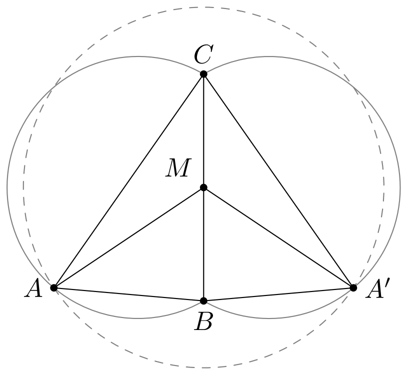
— Điểm A thỏa mãn

+) Góc $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nên A nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên cạnh BC;

+) Đoạn $AM = 5$ cm nên A nằm trên đường tròn $(M; 5 \text{ cm})$.

Do đó điểm A là giao điểm của hai hình trên.

2) Cách dựng:



— Dựng đoạn $BC = 6$ cm và trung điểm M của BC;

— Dựng cung chứa góc 45° trên đoạn BC;

— Dựng đường tròn $(M; 5 \text{ cm})$ cắt cung chứa góc ở trên tại A;

— Nối AB, AC ta được tam giác ABC.

3) Chứng minh:

— Ta có $BC = 6$ cm (cách dựng);

— $\widehat{A} = 45^\circ$;

— $AM = 5$ cm (do A nằm trên $(M; 5 \text{ cm})$).

4) Biện luận:

Vì $(M; 5 \text{ cm})$ cắt cung chứa góc 45° dựng trên đoạn BC tại hai điểm phân biệt nên bài toán có hai nghiệm hình.

❷ Tương tự câu a).

□

BÀI 13. Dựng tam giác vuông biết

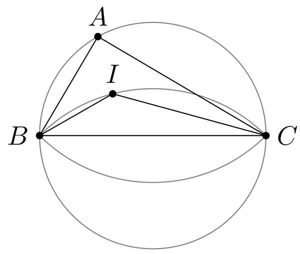
❶ cạnh huyền bằng 6 cm, bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 cm.

❷ cạnh huyền bằng 5 cm, bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Cạnh huyền bằng 6 cm, bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 cm.

1) Phân tích:



Giả sử ta dựng được tam giác ABC vuông tại A thỏa mãn đề bài, ta có

— $BC = 6$ cm nên dựng được ngay;

— Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có

$$\widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 180^\circ - \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 135^\circ.$$

Do đó điểm I nằm trên cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC.

Mà bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 1 cm nên I nằm trên đường thẳng d song song và cách BC một khoảng là 1 cm.

Do đó I là giao điểm của d và cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC.

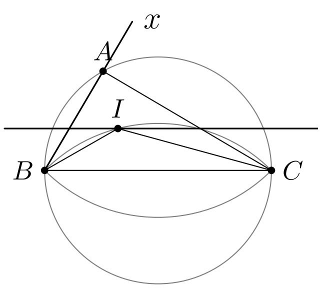
— Điểm A thỏa mãn

+) Nằm trên đường tròn đường kính BC;

+) Nằm trên tia Bx sao cho BI là tia phân giác của $\widehat{xBC}$.

Do đó điểm A là giao điểm của Bx và đường tròn đường kính BC.

2) Cách dựng:



— Dựng đoạn $BC = 6$ cm;

— Dựng cung chứa góc 135° trên đoạn BC;

— Dựng đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng 1 cm;

— Dựng đường tròn đường kính BC;

— Dựng tia Bx sao cho BI là phân giác góc $\widehat{xBC}$, khi đó Bx cắt đường tròn đường kính BC tại A;

— Nối AB, AC ta được tam giác ABC.

3) Chứng minh:

— Ta có $BC = 6$ cm (cách dựng);

— $\widehat{A} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn);

— Khoảng cách từ I đến BC bằng 1 cm (do I nằm trên d). Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{ICB} &= 180^\circ - \widehat{BIC} - \widehat{CBI} = 180^\circ - 135^\circ - \widehat{CBI} = 45^\circ - \widehat{CBI}.\\ \widehat{ICA} &= \widehat{ACB} - \widehat{ICB} = 90^\circ - \widehat{ABC} - 45^\circ + \widehat{CBI} = 45^\circ - 2\widehat{CBI} + \widehat{CBI} = \widehat{ICB}.\end{aligned}$$

Do đó CI là tia phân giác góc $\widehat{ACB}$.

Vậy tam giác ABC thỏa mãn đề bài.

4) Biện luận:

Vì d) cắt cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC tại hai điểm phân biệt nên bài toán có hai nghiệm hình.

❷ Tương tự câu a).

□

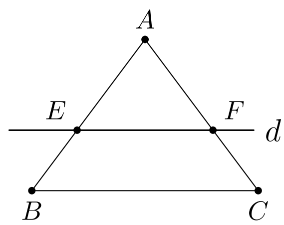
BÀI 14. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường thẳng d song song với cạnh BC cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại E, F. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì $d \parallel BC$ nên $BCFE$ là hình thang cân, do đó

$$\widehat{BEC} = \widehat{BFC}.$$

Suy ra E, F cùng nhìn BC dưới một góc không đổi, do vậy B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.



□

BÀI 15. Cho tam giác ABC có các góc $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ nhọn và đường cao AH, đường trung tuyến AM thỏa mãn $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Gọi E là trung điểm của AB.

❶ Hỏi $\triangle AEH$ là tam giác gì?

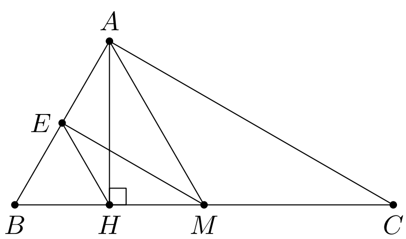
❷ Chứng minh rằng A, E, H, M cùng thuộc một đường tròn.

❸ Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Vì $\triangle AHB$ vuông tại H và E là trung điểm AB nên $EA = EH \Rightarrow \triangle EAH$ cân tại E.

❷ Vì EM là đường trung bình của tam giác ABC nên $EM \parallel AC \Rightarrow \widehat{EMA} = \widehat{MAC} = \widehat{HAB} = \widehat{EHA}$. Do đó A, E, H, M cùng thuộc một đường tròn.



c) Vì A, E, H, M cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{MEA} = \widehat{MHA} = 90^\circ \Rightarrow EM \perp AB \Rightarrow AC \perp AB$.

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

□

BÀI 7 TỨ GIÁC NỘI TIẾP

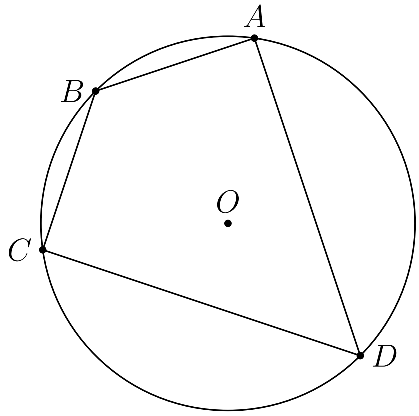
A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa tứ giác nội tiếp

Định nghĩa 1. Nếu qua bốn đỉnh của một tứ giác (lồi) có một đường tròn thì tứ giác đó gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn, còn đường tròn đó gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Ta có minh họa với tứ giác lồi $ABCD$ như sau

$A, B, C, D \in (O, R) \Leftrightarrow ABCD$ nội tiếp trong (O, R) và khi đó, ta thấy ngay



❶ Theo định nghĩa đường tròn thì
$OA = OB = OC = OD = R$
nhận xét đó sẽ gợi ý cho chúng ta một phương pháp chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn (hoặc nói tứ giác $ABCD$ nội tiếp được).

❷ Với từng điều kiện
$OA = OB \Leftrightarrow O$ thuộc đường trung trực của AB
$OA = OD \Leftrightarrow O$ thuộc đường trung trực của AD

nhận xét đó sẽ gợi ý cho chúng ta phương pháp xác định tâm của một tứ giác nội tiếp được.

2. Tính chất

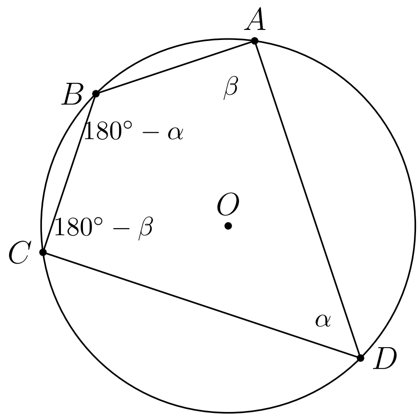
Định lí 1.

❶ ***Thuận***: *Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện nhau bằng hai góc vuông.*

❷ ***Đảo***: *Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện nhau bằng 2v thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.*

Ta có hình minh họa với tứ giác lồi $ABCD$ như sau

$ABCD$ nội tiếp $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ. \end{array}\right.$



B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1. Chứng minh tứ giác nội tiếp đường tròn

Phương pháp giải: Phương pháp

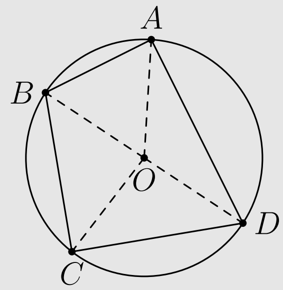
Để chứng minh tứ giác nội tiếp đường tròn chúng ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

***Cách* 1:** Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.

Tức là, nếu ta có

$$OA = OB = OC = OD$$

thì tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O, OA).

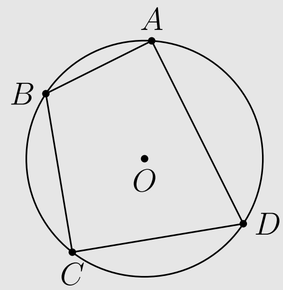


***Cách* 2:** Chứng minh tổng hai góc đối diện bằng hai góc vuông.

Tức là, nếu ta có

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ \text{ hoặc } \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$$

thì tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn.

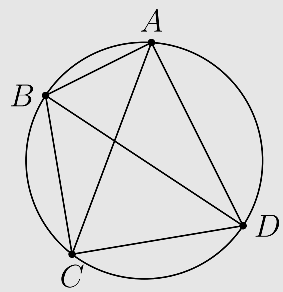


***Cách* 3:** Dùng cung chứa góc α.

Tức là, nếu ta có

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} \text{ và } C, D \text{ cùng phía với } AB$$

thì tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

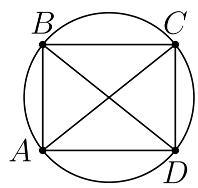


VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp được.

✍ LỜI GIẢI.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD, ta có ngay

$$OA = OB = OC = OD \Leftrightarrow ABCD \text{ nội tiếp trong } (O, OA).$$



□

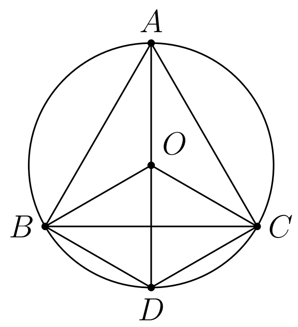
VÍ DỤ 2 (Bài 58/tr 90 - Sgk). Cho $\triangle ABC$ đều. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa đỉnh A, lấy điểm D sao cho $DB = DC$ và $\widehat{DCB} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$.

❶ Chứng minh $ABDC$ là tứ giác nội tiếp.

❷ Xác định tâm của đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶



$\triangle DBC$ cân đỉnh D nên $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB} = 30^\circ$.

Suy ra $\widehat{CDB} = 180^\circ - \left(\widehat{DBC} + \widehat{DCB}\right) = 120^\circ$.

Tứ giác $ABCD$ có tổng hai góc đối

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ.$$

Vậy tứ giác $ABDC$ nội tiếp.

❷ Do đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ cũng đồng thời là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ nên để xác định tâm đường tròn qua A, B, C, D chỉ cần tìm giao điểm O của AD với đường cao BB' của $\triangle ABC$.

Đường tròn (O, OA) đi qua A, B, C, D.

□

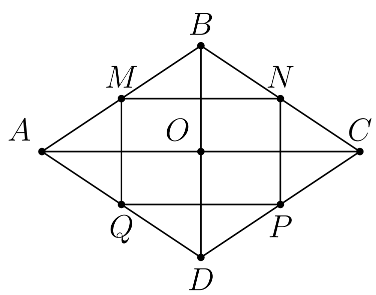
VÍ DỤ 3. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O, cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

❶ Chứng minh rằng $AMNC$ là một tứ giác nội tiếp.

❷ Chứng minh rằng $MNPQ$ là một tứ giác nội tiếp.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶



Xét hai tam giác $\triangle AMC$ và $\triangle CNA$, ta có

$$AC \text{ chung}; \quad \widehat{MAC} = \widehat{NCA}; \quad AM = CN = \frac{a}{2}.$$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle CNA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CMA} = \widehat{ANC}$.

Vậy tứ giác $AMNC$ nội tiếp được một đường tròn.

❷ Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Vì OM, ON, OP, OQ theo thứ tự là đường trung tuyến của các tam giác vuông $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle C$ nên

$$OM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}, \quad ON = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, \quad OP = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}, \quad OQ = \frac{1}{2}DA = \frac{a}{2}.$$

Suy ra $OM = ON = OP = OQ = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow MNPQ$ nội tiếp đường tròn $\left(O, \dfrac{a}{2}\right)$.

Cách 2: Vì MN, PQ theo thứ tự là đường trung bình của các tam giác $\triangle ABC, \triangle ADC$ nên $MN \overset{\parallel}{=} \dfrac{1}{2}AC, PQ \overset{\parallel}{=} \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow MN \overset{\parallel}{=} PQ \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác
$$\widehat{MNP} = \widehat{BOC} = 90^\circ - \text{ vì là hai góc có cạnh tương ứng song song.}$$
Suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật, do đó nó nội tiếp được một đường tròn.

□

DẠNG 2. Sử dụng tứ giác nội tiếp giải các bài toán hình học

Phương pháp giải: *Phương pháp*

Khi đã có được một tứ giác nội tiếp hoặc đã chứng minh được một tứ giác nội tiếp ta có thể suy ra

— Các cặp góc đối bù nhau.

— Các cặp góc nội tiếp cùng chắc một cung bằng nhau.

...

Đó chính là lợi ích của tứ giác nội tiếp để thực hiện các yêu cầu khác của bài toán hình học.

VÍ DỤ 1 (Bài 54/tr 89 - Sgk). Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. Chứng minh rằng các đường trung trực của AC, BD, AB cùng đi qua một điểm.

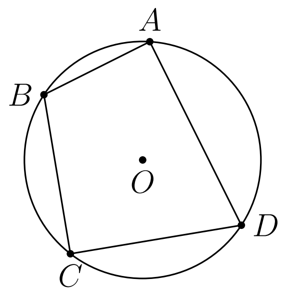
LỜI GIẢI.

Tứ giác $ABCD$ có tổng hai góc đối $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ nên nó là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm O.

Đường tròn (O) cũng là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ nên O là giao điểm các đường trung trực của AB và AC.

Tương tự, (O) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD$ nên O nằm trên đường trung trực của BD.

Vậy các trung trực của AB, BD, AC cùng đi qua điểm O.



□

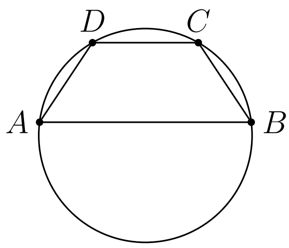
VÍ DỤ 2. Tìm điều kiện để hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ nội tiếp được.

LỜI GIẢI.

Vì $ABCD$ là hình thang, nên ta có $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ (1).

Để $ABCD$ nội tiếp được, điều kiện là $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ (2).

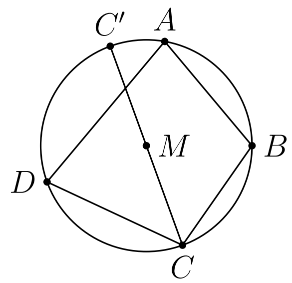
Từ (1) và (2) suy ra
$$\widehat{A} = \widehat{B} \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình thang cân.}$$



□

VÍ DỤ 3 (Bài 55/tr 89 - Sgk). Cho $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp đường tròn tâm M, biết $\widehat{DAB} = 80^\circ, \widehat{DAM} = 30^\circ, \widehat{BMC} = 70^\circ$. Hãy tính số đo các góc $\widehat{MAB}, \widehat{BCM}, \widehat{AMB}, \widehat{DMC}, \widehat{AMD}, \widehat{MCD}, \widehat{BCD}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta có

$\widehat{MAB} = \widehat{DAB} - \widehat{DAM} = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ.$

$\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{DAB} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$

Kẻ đường kính CC'.

Ta có

$$\widehat{BCM} = \widehat{BCC'} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{CC'} - \text{sđ}\overset{\frown}{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 70^\circ\right) = 55^\circ.$$

Suy ra

$\widehat{MCD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCM} = 100^\circ - 55^\circ = 45^\circ.$

$\widehat{AMD} = 180^\circ - \left(\widehat{DAM} + \widehat{ADM}\right) = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ.$

$\widehat{DMC} = \text{sđ}\overset{\frown}{CD} = \text{sđ}\overset{\frown}{DB} - \text{sđ}\overset{\frown}{BC} = 160^\circ - 70^\circ = 90^\circ.$

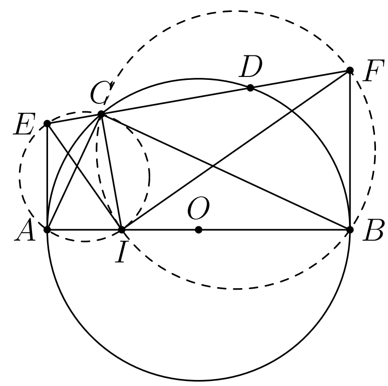
$\widehat{AMB} = 360^\circ - \left(\widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA}\right) = 360^\circ - (70^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 80^\circ.$ □

VÍ DỤ 4. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một dây CD. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với CD, cắt AB tại I. Các tiếp tuyến tại A và B của nửa đường tròn cắt đường thẳng CD theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng:

❶ Các tứ giác $AECI$ và $BFCI$ nội tiếp được.

❷ $\triangle IEF \sim \triangle CAB$, từ đó suy ra $\triangle IEF$ vuông.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Theo tính chất của tiếp tuyến ta có $AE \perp AB, BF \perp AB$.

— Tứ giác $AECI$ có

$$\widehat{EAI} + \widehat{ECI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác $AECI$ nội tiếp đường tròn (O_1).

— Tứ giác $BFCI$ có

$$\widehat{IBF} + \widehat{ICF} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác $BFCI$ nội tiếp đường tròn (O_2).

❷ Xét hai tam giác $\triangle IEF$ và $\triangle CAB$, ta có

$\widehat{IEF} = \widehat{CAB}$ - vì hai góc nội tiếp cùng chắn cung CI của đường tròn (O_1).

$\widehat{IFE} = \widehat{CBA}$ - vì hai góc nội tiếp cùng chắn cung CI của đường tròn (O_2).

Vậy $\triangle IEF \sim \triangle CAB$ suy ra $\widehat{EIF} = \widehat{ACB}$.

Mặt khác $\widehat{ACB} = 90^\circ$ - vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB nên $\widehat{EIF} = 90^\circ$, suy ra $\triangle IEF$ vuông. □

Nhận xét. *Khi đã chứng minh được một tứ giác nội tiếp ta có thể vẽ đường tròn đi qua bốn đỉnh của nó, để dễ nhận ra các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.*

VÍ DỤ 5. Cho $\triangle ABC$, các đường phân giác của các góc trong $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ và gặp nhau tại S, các đường phân giác của các góc ngoài $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ gặp nhau tại E. Chứng minh rằng:

❶ $BSCE$ là tứ giác nội tiếp.

❷ Ba điểm A, S, E thẳng hàng.

❸ Trung điểm M của SE thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

— Vì BS, BE là các tia phân giác của hai góc kề bù nên $BS \perp BE$.

— Vì CS, CE là các tia phân giác của hai góc kề bù nên $CS \perp CE$.

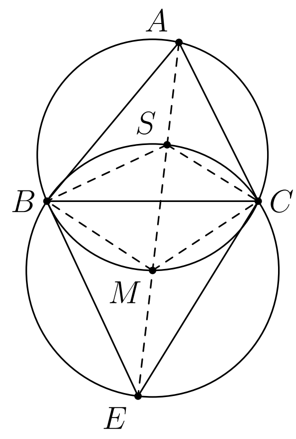
Suy ra $\widehat{SBE} + \widehat{SCE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Do đó, tứ giác $BSCE$ nội tiếp (cụ thể nội tiếp đường tròn đường kính SE).

❷ Vì AS và AE đều là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên A, S, E thẳng hàng.

❸ Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau

Cách 1: Vì M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BSCE$ nên $\widehat{SCB} = \dfrac{1}{2}\widehat{SMB}$.



Mặt khác $\widehat{SCB} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{SMB} = \widehat{ACB}$ (1).

Tương tự ta cũng có $\widehat{SMC} = \widehat{ABC}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $\widehat{BMC} = \widehat{SMB} + \widehat{SMC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$.

$\Rightarrow \widehat{BMC} + \widehat{BAC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

Do đó tứ giác $ABMC$ nội tiếp.

Vậy điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Cách 2: Chứng minh tương tự như trong cách 1 ta được

$$\widehat{SMB} = \widehat{ACB} \Leftrightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ACB}.$$

Suy ra M và C thuộc cùng một cung chứa góc vẽ về một phía của AB.

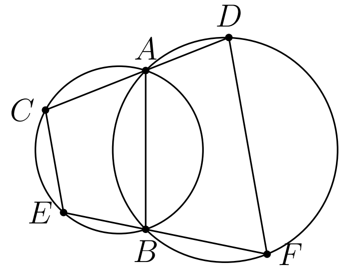
Vậy M thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

□

Nhận xét. *Để chứng minh $ABMC$ là tứ giác nội tiếp (câu b) trong cách 1 ta sử dụng định lí đảo "Nếu một tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn", trong cách 2 ta sử dụng cung chứa góc "Nếu các điểm C, M nằm cùng phía đối với AB và $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ thì C, M, A, B thuộc cùng một đường tròn".*

VÍ DỤ 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại C và cắt đường tròn (O') tại D. Vẽ một đường thẳng qua B cắt đường tròn (O) tại E và đường tròn (O') tại F. Hai đường thẳng CD và EF không cắt nhau ở bên trong hai đường tròn. Chứng minh rằng $CE \parallel DF$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Vẽ dây chung AB ta có $\widehat{DAB} + \widehat{CAB} = 180^\circ \quad (1)$.
Tứ giác $ABEC$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{CEB} + \widehat{CAB} = 180^\circ \quad (2).$$

Từ $(1), (2) \Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{DAB} \quad (3)$.
Tứ giác $ABFD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{DAB} + \widehat{DFB} = 180^\circ.$$

Kết hợp với (3) ta có $\widehat{CEB} + \widehat{DFB} = 180^\circ \Rightarrow CE \parallel DF$.

□

Nhận xét. *Trong ví dụ này, ta đã chứng minh $\widehat{CEB} = \widehat{DAB}$.*
Một cách tổng quát "Mỗi góc của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài của góc đối diện với nó".

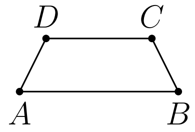
C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp được, biết

1. $ABCD$ là hình thang cân.
2. $ABCD$ là hình chữ nhật.

✍ LỜI GIẢI.

1. Ta có thể trình bày theo các cách sau

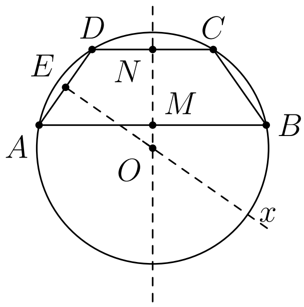


Cách 1: Vì $ABCD$ là hình thang cân, nên ta có
$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \widehat{BAD} + \widehat{CDA} = 180^\circ$ (tổng hai góc trong cùng phía).
Vậy hình thang cân $ABCD$ nội tiếp được.

Cách 2: Gọi E, M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, AB, CD.
Dựng đường trung trực Ex của AD cắt MN tại O, ta có

$OA = OB$, vì O thuộc MN là trung trực của AB
$OC = OD$, vì O thuộc MN là trung trực của CD
$OA = OD$, vì O thuộc Ex là trung trực của AD.

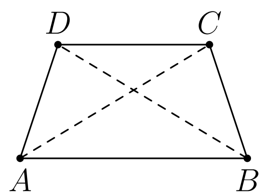
Suy ra $OA = OB = OC = OD$.
Vậy hình thang $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn (O, OA).



Cách 3: Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle BAC$, ta có

AB chung
$\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$, vì $ABCD$ là hình thang cân
$AD = BC$, vì $ABCD$ là hình thang cân

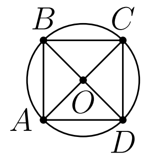
Do đó, $\triangle ABD = \triangle BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.
Vậy các điểm C, D nằm cùng phía đối với AB và thỏa mãn $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ nên bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn.



2.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD.

Ta có $OA = OB = OC = OD \Leftrightarrow ABCD$ nội tiếp trong (O, OA).



□

BÀI 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và tia tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn. Trên tia Bx lấy hai điểm C và D (C nằm giữa B và D). Các tia AC và AD lần lượt cắt đường tròn tại E và F. Hai dây AE và BF cắt nhau tại M. Hai tia AF và BE cắt nhau tại N. Chứng minh rằng

❶ $MN \parallel Bx$.

❷ Tứ giác $CDFE$ nội tiếp được.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Trong $\triangle ABN$, ta có

$\widehat{AEB} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Leftrightarrow AE \perp BN \quad (1)$

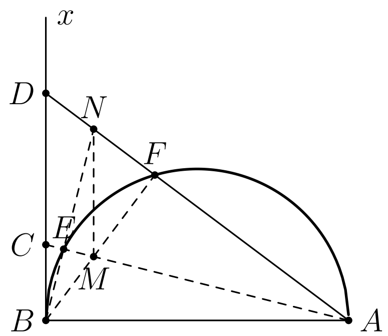
$\widehat{AFB} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Leftrightarrow BF \perp AN \quad (2)$.

Từ (1) và (2), suy ra M là trực tâm $\triangle ABN$.

Suy ra $MN \perp AB$.

Do đó $MN \parallel Bx$, đpcm.



❷ Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau

Cách 1: Nhận xét rằng

$\widehat{CDF} = \widehat{ABF}$, góc có cạnh tương ứng vuông góc.

$\widehat{ABF} = \widehat{AEF}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung.

Khi đó, trong tứ giác $CDFE$, ta nhận thấy

$\widehat{CEF} + \widehat{CDF} = \widehat{CEF} + \widehat{AEF} = 180° \Rightarrow$ Tứ giác $CDFE$ nội tiếp được.

Cách 2: Nhận xét rằng

$90° = \widehat{DFE} + \widehat{BFE} = \widehat{DFE} + \widehat{BAE}$,

$\widehat{BCA} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAE} = 90°$.

$\Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{BCA}$.

Khi đó, trong tứ giác $CDFE$, ta nhận thấy

$\widehat{DCE} + \widehat{DFE} = \widehat{DCE} + \widehat{BCA} = 180° \Rightarrow$ Tứ giác $CDFE$ nội tiếp được.

□

BÀI 3. Cho $\triangle ABC$, các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi D là điểm đối xứng của H qua trung điểm M của BC.

❶ Chứng minh tứ giác $ABDC$ nội tiếp được trong một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.

❷ Đường thẳng DH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I. Chứng minh rằng 5 điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Nhận xét rằng, tứ giác $CDBH$ có hai đường chéo CB và DH cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên nó là hình bình hành, suy ra

$CD \parallel BH$ và vì $BH \perp AC \Rightarrow CD \perp AC \Leftrightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ$.

$BD \parallel CH$ và vì $CH \perp AB \Rightarrow BD \perp AB \Leftrightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ$.

Vậy tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn đường kính AD.

Do đó, tâm O là trung điểm của AD.

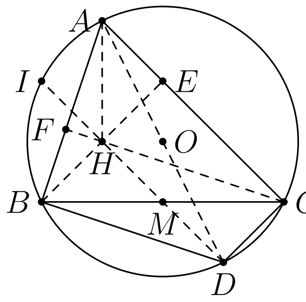
❷ Nhận xét rằng:

$\widehat{AEH} = 90^\circ$, vì BE là đường cao

$\widehat{AFH} = 90^\circ$, vì CF là đường cao

$\widehat{AIH} = \widehat{AID} = 90^\circ$, vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Vậy các điểm E, F, I cùng nhìn AH dưới một góc vuông, do đó 5 điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH.



□

BÀI 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tia OA cắt đường tròn (O') tại C, tia $O'A$ cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng

❶ Tứ giác $OO'CD$ nội tiếp.

❷ Tứ giác $OBO'C$ nội tiếp.

❸ Năm điểm O, O', B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Nhận xét rằng

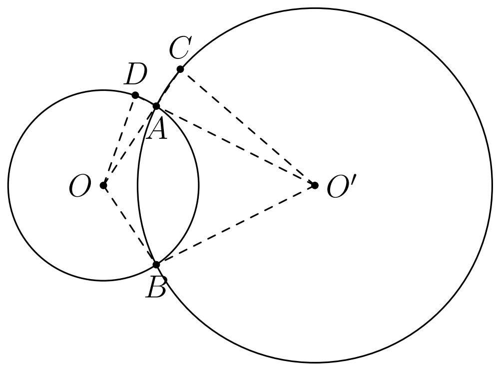
$\widehat{ODO'} = \widehat{OAD}$, vì $\triangle OAD$ cân tại O

$\widehat{OAD} = \widehat{CAO'}$, vì đối đỉnh

$\widehat{CAO'} = \widehat{OCO'}$, vì $\triangle O'AC$ cân tại O'

Từ đó, suy ra $\widehat{ODO'} = \widehat{OCO'}$.

Vậy các điểm C, D nằm cùng phía đối với OO' và thỏa mãn $\widehat{ODO'} = \widehat{OCO'}$ nên bốn điểm O, O', C, D thuộc cùng một đường tròn, tức là tứ giác $OO'CD$ nội tiếp.



❷ Xét hai tam giác $\triangle AOO'$ và $\triangle BOO'$, ta có

OO' chung

$OA = OB$, vì cùng bằng bán kính đường tròn (O)

$O'A = O'B$, vì cùng bằng bán kính đường tròn (O')

Do đó, $\triangle AOO' = \triangle BOO'$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OAO'} = \widehat{OBO'}$.

Khi đó, ta được $\widehat{OBO'} + \widehat{OCO'} = \widehat{OAO'} + \widehat{CAO'} = 180^\circ$, tức là tứ giác $OBO'C$ nội tiếp.

❸ Nhận thấy rằng:

— Từ kết quả câu a), suy ra D thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle COO'$.

— Từ kết quả câu b), ta suy ra B thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle COO'$.

Vậy năm điểm O, O', B, C, D cùng nằm trên một đường tròn ngoại tiếp $\triangle COO'$.

□

BÀI 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp nửa đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Vẽ $EF \perp AD$. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng

❶ Các tứ giác $ABEF, DCEF$ nội tiếp được.

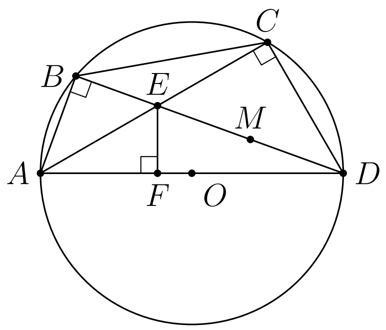
❷ Tia CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCF}$.

❸ Tứ giác $BCMF$ nội tiếp được.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{ABD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD).
Mà $\widehat{AFE} = 90^\circ$ nên tứ giác $ABEF$ nội tiếp đường tròn đường kính AE.
Ta có $\widehat{DCE} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD).
Mà $\widehat{EFD} = 90^\circ$ nên tứ giác $CDFE$ nội tiếp đường tròn đường kính ED.



❷ Trong đường tròn đường kính AD, ta có

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}, \text{ góc nội tiếp cùng chắn cung } \overset{\frown}{AB} \quad (1).$$

Trong đường tròn đường kính DE, ta có

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACF}, \text{ góc nội tiếp cùng chắn cung } \overset{\frown}{EF} \quad (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ACF} \Leftrightarrow CA$ là tia phân giác của góc $\widehat{BCF}$.

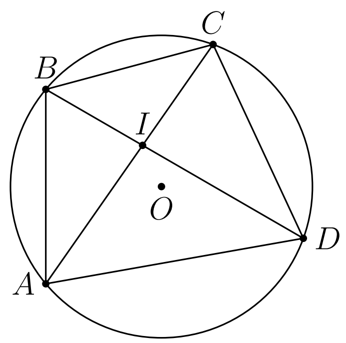
❸ Trong đường tròn đường kính ED ta có $\widehat{EMF} = 2\widehat{EDF}$.
Suy ra $\widehat{BMF} = 2\widehat{BDA}$.
Mà $\widehat{BCF} = 2\widehat{BCA}$ (do CA là tia phân giác của $\widehat{BCF}$).
Mặt khác $\widehat{BCA} = \widehat{BDA}$
Nên $\widehat{BCF} = \widehat{BMF}$.
Do đó tứ giác $BCMF$ nội tiếp.

□

BÀI 6. Chứng minh rằng trong một đường tròn hai dây không đi qua tâm không thể cắt nhau tại trung điểm mỗi dây.

✍ **LỜI GIẢI.**

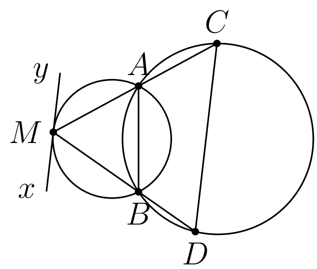
Ta đi chứng minh bằng phản chứng.
Giả sử trái lại có hai dây cung AC và BD cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường và không đi qua tâm O.
Khi đó tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Do đó $ABCD$ là hình chữ nhật
$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$
Vậy BD là đường kính
$\Rightarrow O \in BD$, mâu thuẫn.



□

BÀI 7. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Trên đường tròn (O') lấy một điểm M. Các đường thẳng MA, MB cắt đường tròn (O) tại C và D. Từ M vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn (O'). Chứng minh rằng $xy \parallel CD$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Vẽ dây cung AB, ta có $\widehat{MAB} + \widehat{CAB} = 180^\circ$.
Tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{CDB} + \widehat{CAB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{MAB}.$$

Mặt khác trong đường tròn (O') ta có

$$\widehat{MAB} = \widehat{xMB} \Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{xMB} \Rightarrow CD \parallel xy, \text{ đpcm.}$$

□

BÀI 8. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) và (O') tại C và D. Vẽ dây CE của đường tròn (O) và dây DF của đường tròn (O') song song với nhau. Chứng minh rằng ba điểm B, E, F thẳng hàng.

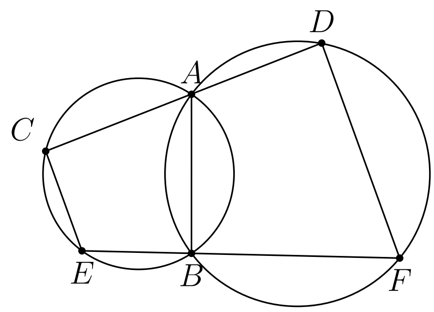
✍ **LỜI GIẢI.**

Vẽ dây chung AB, ta lần lượt thấy

— Vì $CE \parallel DF$ nên $\widehat{ACE} + \widehat{ADF} = 180^\circ$.

— Tứ giác $ABEC$ nội tiếp nên

$$\widehat{ABE} + \widehat{ACE} = 180^\circ \quad (1).$$



— Tứ giác $ABFD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{ABF} + \widehat{ADF} = 180^\circ \quad (2).$$

Cộng theo vế (1) và (2) ta được

$$\widehat{ABE}+\widehat{ACE}+\widehat{ABF}+\widehat{ADF} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{EBF}+\left(\widehat{ACE} + \widehat{ADF}\right) = 360^\circ.$$

$$\Rightarrow \widehat{EBF} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{Ba điểm } B, E, F \text{ thẳng hàng.}$$

□

BÀI 9. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Đường thẳng qua C vuông góc với CM cắt các tia AB, AD lần lượt tại E và F. Tia CM cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh rằng

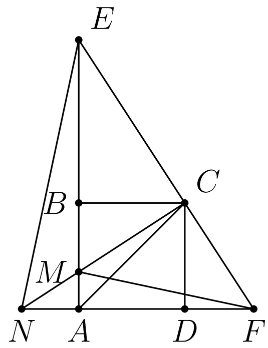
❶ Tứ giác $AMCF$ nội tiếp được.

❷ Tứ giác $ANEC$ nội tiếp được.

❸ $CM + CN = EF$.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta lần lượt thấy



$\widehat{MAF} = 90^\circ$, vì $ABCD$ là hình vuông.
$\widehat{MCF} = 90^\circ$, theo giả thiết $EF \perp CM$.
Do đó, tứ giác $AMCF$ nội tiếp đường tròn đường kính MF.

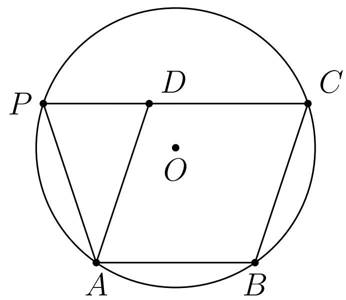
❷ Ta lần lượt thấy
$\widehat{NAE} = 90^\circ$, vì $ABCD$ là hình vuông.
$\widehat{NCE} = 90^\circ$, theo giả thiết $EF \perp CM$.
Do đó, tứ giác $ANEC$ nội tiếp đường tròn đường kính NE.

❸ Ta lần lượt xét
— Xét $\triangle CMF$ vuông tại C, ta có
$\widehat{CMF} = \widehat{CAF} = 45^\circ$ cùng chắn cung $\widehat{CF}$ của (MF).
$\Rightarrow \triangle CMF$ vuông cân tại $C \Rightarrow CM = CF \quad (1)$.
— Xét $\triangle CNE$ vuông tại C, ta có
$\widehat{CNE} = \widehat{CAE} = 45^\circ$, cùng chắn cung $\widehat{CE}$ của (NE).
$\Rightarrow \triangle CNE$ vuông tại $C \Rightarrow CN = CE \quad (2)$.
Cộng theo vế (1) và (2), ta được $CM + CN = CF + CE = EF$, đpcm.

□

BÀI 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C cắt đường thẳng CD tại P khác C. Chứng minh $AP = AD$.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta có $ABCP$ là tứ giác nội tiếp.
Suy ra $\widehat{B} + \widehat{APC} = 180^\circ$.
Mà $\widehat{ADC} = \widehat{B}$ (do $ABCD$ là hình bình hành)
Nên $\widehat{ADC} + \widehat{APC} = 180^\circ$.
Mặt khác $\widehat{ADP} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù).
Suy ra $\widehat{ADP} = \widehat{APD}$.
Vậy $\triangle APD$ cân tại A
$\Rightarrow AP = AD$.

□

BÀI 11. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Trên cung nhỏ AB lấy một điểm C. Vẽ $CD \perp AB, CE \perp MA, CF \perp MB$. Gọi I là giao điểm của AC và DE, K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng

❶ Tứ giác $AECD$ nội tiếp được.
❷ Tứ giác $BFCD$ nội tiếp được.
❸ $CD^2 = CE \cdot CF$.
❹ $IK \parallel AB$.

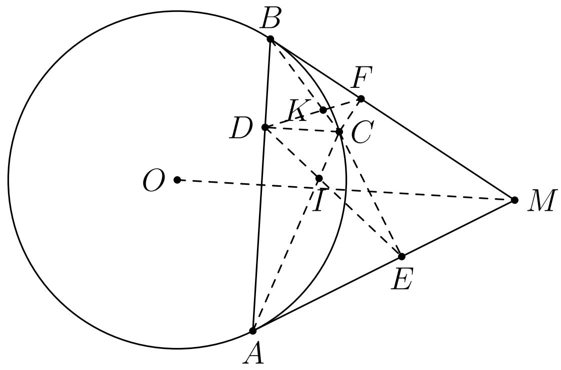
✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Xét tứ giác $AECD$ ta có

$$\widehat{ADC}+\widehat{AEC}=90^\circ+90^\circ=180^\circ.$$

Do đó, tứ giác $AECD$ nội tiếp được.



❷ Xét tứ giác $BFCD$ ta có

$$\widehat{BDC}+\widehat{BFC}=90^\circ+90^\circ=180^\circ.$$

Do đó, tứ giác $BFCD$ nội tiếp được.

❸ Xét hai tam giác $\triangle CDE$ và $\triangle CFD$, ta có
$\widehat{CED}=\widehat{CAD}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AECD$.
$\widehat{CAD}=\widehat{CBF}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung và góc tạo bởi tiếp tuyến với dây cung đó.
$\widehat{CBF}=\widehat{CDF}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFCD$.
$\Rightarrow \widehat{CED}=\widehat{CDF} \quad (1).$
$\widehat{CDE}=\widehat{CAE}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AECD$.
$\widehat{CAE}=\widehat{CBD}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung và góc tạo bởi tiếp tuyến với dây cung đó.
$\widehat{CBD}=\widehat{CFD}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFCD$.
$\Rightarrow \widehat{CDE}=\widehat{CFD} \quad (2).$
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CDE\sim\triangle CFD \Rightarrow \dfrac{CD}{CF}=\dfrac{CE}{CD}\Leftrightarrow CD^2=CE\cdot CF$, đpcm.

❹ Ta có $\widehat{CED}=\widehat{CDF}$

$$\widehat{CDF}+\widehat{BDF}=\widehat{BDC}=90^\circ$$

$$\widehat{CED}+\widehat{DEA}=\widehat{CEA}=90^\circ.$$

Do đó $\widehat{BDF}=\widehat{AED}$, hay $\widehat{BDK}=\widehat{AEI}$.
Mặt khác $\widehat{DBK}=\widehat{EAI}$ nên $\triangle AEI\sim\triangle BDK$.
Suy ra $\widehat{AIE}=\widehat{BKD}$.
Mà $\widehat{AIE}=\widehat{DIC}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{DIC}=\widehat{BKD}$.
Do đó tứ giác $DICK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IDC}=\widehat{IKC}$.
Hay $\widehat{CDE}=\widehat{IKC}$.
Vì $\widehat{CDE}=\widehat{ABC}(=\widehat{CAM})$ nên $\widehat{IKC}=\widehat{ABC}$.
Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $AB\parallel IK$.

□

BÀI 8 ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP - ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp đa giác đều

Định nghĩa 1. Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác đó và khi đó đa giác được gọi là nội tiếp đường tròn.

Định nghĩa 2. Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác đó và khi đó đa giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.

Định lí 1. *Bất kì đa giác đều nào cũng có một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp.*

Ta có:

- Tâm chung của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp một đa giác đều gọi là tâm của đa giác đều đó.
- Khoảng cách từ tâm của đa giác đều đến cạnh của nó gọi là trung đoạn (cũng là bán kính của đường tròn nội tiếp).

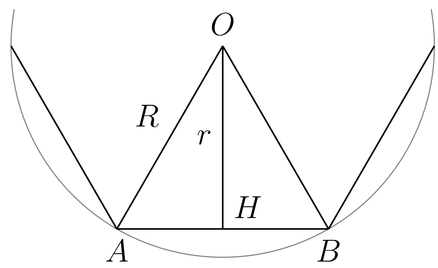
2. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp đa giác đều

Gọi R, r, n và a lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp, số cạnh và độ dài mỗi cạnh.

Xét $\triangle OHA$, ta có $\widehat{AOB} = \dfrac{180^\circ}{n} \Rightarrow \widehat{AOH} = \dfrac{180^\circ}{2n}$.

$R = OA = \dfrac{AH}{\sin \widehat{AOH}} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}} \Rightarrow \sin\dfrac{180^\circ}{n} = \dfrac{a}{2R}$.

$r = OH = \dfrac{AH}{\tan \widehat{AOH}} = \dfrac{a}{2\tan\dfrac{180^\circ}{n}} \Rightarrow \tan\dfrac{180^\circ}{n} = \dfrac{a}{2r}$.

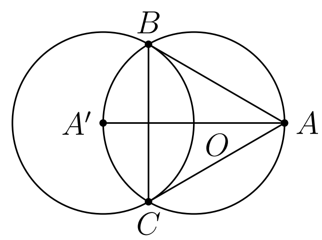


Định lí 2. *Với mọi đa giác đều có cùng số cạnh, tỉ số giữa chu vi đa giác với đường kính của đường tròn ngoại tiếp không phụ thuộc độ dài của đường kính.*

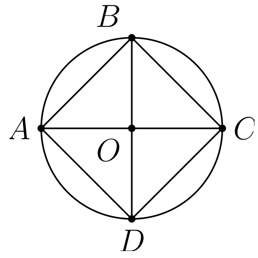
3. Cách vẽ các đa giác đều thông dụng bằng thước và compa

a) Để vẽ $\triangle ABC$ đều, nội tiếp đường tròn (O), ta thực hiện

- Vẽ đường kính AA'.
- Vẽ đường tròn $(A', A'O)$, cắt (O) ở B và C.



b) Để vẽ hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), ta vẽ hai đường kính vuông góc là AC và BD.

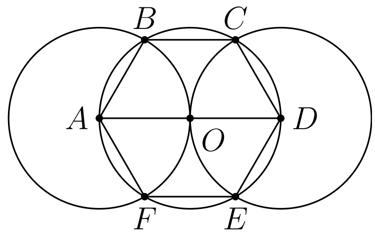


c) Để vẽ lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O), ta thực hiện

— Vẽ đường kính AD.

— Vẽ đường tròn $(A; AO)$, cắt (O) ở B và F.

— Vẽ đường tròn $(D; DO)$, cắt (O) ở C và E.



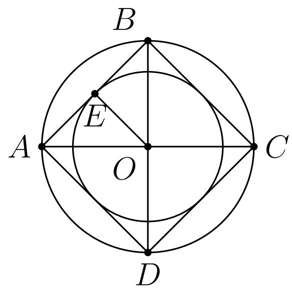
B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. (Bài 61/trang 91 - SGK)

1. Vẽ đường tròn tâm O, bán kính 2 cm.
2. Vẽ hình vuông nội tiếp đường tròn (O) đó.
3. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp hình vuông ở câu b) rồi vẽ đường tròn $(O; r)$.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Cách vẽ: Mở com-pa một khoảng bằng 2 cm. Quay một vòng để vẽ đường tròn $(O; 2)$.
2. Cách vẽ:
   — Từ điểm A bất kì trên đường tròn, vẽ đường kính AC.
   — Vẽ đường kính BD vuông góc với đường kính AC.
   — A, B, C, D là bốn đỉnh của hình vuông cần dựng.



3. Đường tròn nội tiếp hình vuông có đường kính bằng cạnh của hình vuông $ABCD$.
   Ta có $OE^2 + EA^2 = OA^2 \Leftrightarrow 2r^2 = 2^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$.
   Cách vẽ đường tròn nội tiếp hình vuông: Kẻ $OE \perp AB$, vẽ đường tròn $(O; OE)$.

□

VÍ DỤ 2. (Bài 62/trang 91 - SGK)

1. Vẽ $\triangle ABC$ đều cạnh $a = 3$ cm.
2. Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp $\triangle ABC$. Tính R.
3. Vẽ đường tròn $(O; r)$ nội tiếp $\triangle ABC$. Tính r.
4. Vẽ tam giác đều IJK ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$.

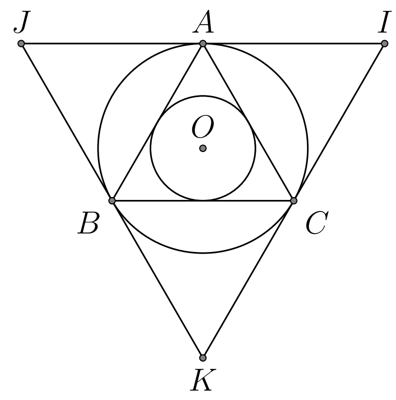
✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Cách vẽ:

— Vẽ $BC = 3$ cm.

— Vẽ các đường tròn $(B; 3\text{ cm})$ và $(C; 3\text{ cm})$ cắt nhau tại A.

— $\triangle ABC$ là tam giác đều có cạnh bằng 3 cm.



❷ Tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC trùng với trọng tâm của tam giác đó.

Ta có bán kính R của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là

$$R = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{ cm}.$$

c) Bán kính r của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là

$$r = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ cm}.$$

d) Vẽ các đường tròn $(A; AB)$, $(B; AB)$ và $(C; AB)$.

Các đường tròn này cắt nhau tại I, J, K thì $\triangle IJK$ là tam giác ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$.

□

VÍ DỤ 3. Một đường tròn có bán kính R.

❶ Tính diện tích tam giác đều nội tiếp đường tròn đó theo R.

❷ Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó theo R.

❸ Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn đó theo R.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Gọi a là độ dài cạnh tam giác đều, ta có

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{3}} \Rightarrow a = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}.$$

Khi đó diện tích tam giác được cho là

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

❷ Gọi a là độ dài cạnh hình vuông, ta có

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{4}} \Rightarrow a = 2R\sin 45^\circ = R\sqrt{2}.$$

Khi đó diện tích hình vuông được cho là

$$S = a^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2.$$

❸ Diện tích lục giác đều gồm 6 tam giác đều cạnh bằng R là

$$S = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Nhận xét. *Như vậy, để tính diện tích của một đa giác đều bất kì chúng ta chỉ cần xác định được độ dài của cạnh đa giác đều đó và đối với các đa giác đều chúng ta đã có được công thức liên hệ giữa cạnh với bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp.*

□

VÍ DỤ 4. (Bài 63/trang 92 - SGK) Cho đường tròn $(O;R)$, tính theo R:

❶ Cạnh của tam giác đều nội tiếp.

❷ Cạnh của hình vuông nội tiếp.

❸ Cạnh của lục giác đều nội tiếp.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có $a = 2R\cdot\sin\dfrac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}$.

❷ Ta có $a = 2R\cdot\sin\dfrac{180^\circ}{4} = 2R\sin 45^\circ = R\sqrt{2}$.

❸ Ta có $a = 2R\cdot\sin\dfrac{180^\circ}{6} = 2R\sin 30^\circ = R$.

□

VÍ DỤ 5. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O.

❶ Gọi a là độ dài cạnh lục giác đều. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r của lục giác.

❷ Gọi M là một điểm bất kì trong $\triangle AOB$. Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên OA, OB, CF. Chứng minh rằng năm điểm M, H, I, O, K cùng thuộc một đường tròn.

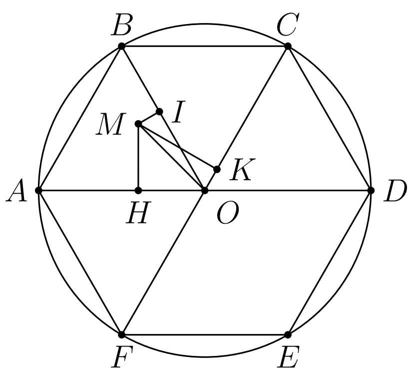
❸ Chứng minh rằng $\triangle HIK$ là tam giác đều.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Ta có

$$R = \frac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{6}} = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a.$$

$$r = \frac{a}{2\tan\dfrac{180^\circ}{6}} = \frac{a}{2\tan 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



❷ Nhận xét rằng $\widehat{OHM} = \widehat{OIM} = \widehat{OKM} = 90^\circ$.

$\Rightarrow H, I, K$ thuộc đường tròn có đường kính OM.

$\Rightarrow H, I, K, O, M$ cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử K thuộc đoạn thẳng OF.

Xét đường tròn đi qua năm điểm H, I, K, O, M, ta có $\widehat{HKI} = \widehat{HOI} = 60^\circ$ vì góc nội tiếp cùng chắn một cung.

Tương tự, ta có $\widehat{KHI} = \widehat{KOI} = 60^\circ$ vì góc nội tiếp cùng chắn một cung. Trong $\triangle HIK$ ta có $\widehat{HIK} = \widehat{KHI} = 60^\circ$ nên $\triangle HIK$ là tam giác đều.

Nhận xét. — *Trong lời giải ở câu a), ta tính được R, r dựa trên công thức đã biết, tuy nhiên cũng có thể sử dụng việc xét tam giác vuông để xác định R, r.*

— *Nhờ chứng minh được năm điểm M, H, I, O, K cùng thuộc một đường tròn, các góc $\widehat{HKI}$ và $\widehat{HOI}$ là hai góc nội tiếp của đường tròn đó, do đó áp dụng tính chất của góc nội tiếp, ta tính được $\widehat{HIK} = 60^\circ$ và $\widehat{IKH} = 60^\circ$.*

□

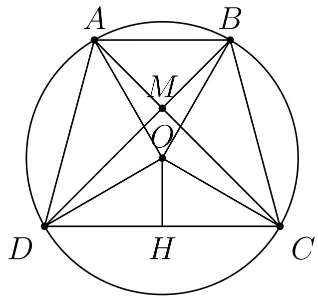
VÍ DỤ 6. (Bài 64/trang 92 - SGK) Trên một đường tròn bán kính R lần lượt đặt theo cùng một chiều, kẻ từ một điểm A, ba cung AB, BC, CD sao cho sđ $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$, sđ $\overset{\frown}{BC} = 90^\circ$ và sđ $\overset{\frown}{CD} = 120^\circ$.

❶ Tứ giác $ABCD$ là hình gì?

❷ Chứng minh rằng hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ vuông góc với nhau.

❸ Tính độ dài các cạnh của tứ giác $ABCD$ theo R.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có $\widehat{BDC} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BC} = 45^\circ$.

sđ $\overset{\frown}{AD} = 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AD} = 45^\circ = \widehat{BDC} \Rightarrow AB \parallel CD$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Do đó, $ABCD$ là hình thang và hình thang nội tiếp đường tròn nên nó là hình thang cân.

b) Gọi M là giao điểm của AC và BD, vì $\widehat{AMD}$ là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên

$$\widehat{AMD} = \frac{\text{sđ } \overset{\frown}{AD} + \text{sđ } \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{90^\circ + 90^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BD.$$

c) Ta lần lượt có các nhận xét:

— $\triangle OAB$ đều nên $AB = OA = R$.

— $\triangle OAD$ vuông cân nên $AD = OA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = BC$.

Kẻ $OH \perp CD$, ta có $CD = 2CH = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}$.

Nhận xét. *Trong lời giải của câu a) chúng ta có thể thực hiện đơn giản hơn bằng cách:*

$$\text{sđ } \overset{\frown}{AD} = \text{sđ } \overset{\frown}{BC} = 90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow AB \parallel CD.$$

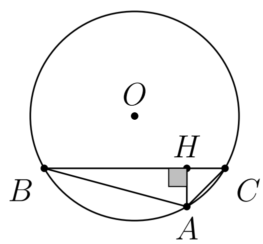
□

VÍ DỤ 7. Cho đường tròn $(O; R)$. Cho một dây cung AB bằng cạnh hình vuông nội tiếp và một dây cung BC bằng cạnh tam giác đều nội tiếp (C và A nằm cùng phía đối với BO). Tính các cạnh của $\triangle ABC$ và đường cao AH của nó theo R.

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo giả thiết, ta có

$$AB = R\sqrt{2},\ BC = R\sqrt{3}.$$



Trong đường tròn (O), ta có

$$\text{sđ } \overset{\frown}{AC} = \text{sđ } \overset{\frown}{BC} - \text{sđ } \overset{\frown}{AB} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 15^\circ.$$

Trong $\triangle ABH$, ta có $AH = AB\sin 15^\circ \approx R\sqrt{2}\cdot 0{,}2588 \approx 0{,}37R$.
Vì $\triangle AHC$ vuông cân nên $AC = AH\sqrt{2} \approx 2R\cdot 0{,}2588 \approx 0{,}52R$. □

Nhận xét. *Ví dụ trên thuộc dạng toán tính toán đơn giản. Tuy nhiên, để thực hiện được nó các em học sinh cần nhớ được công thức tính độ dài của tam giác đều và tứ giác đều nội tiếp trong đường tròn* $(O;R)$.

C BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Một đa giác đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Biết độ dài mỗi cạnh của nó là $R\sqrt{2}$. Hỏi đa giác đó là hình gì?

✍ **LỜI GIẢI.**

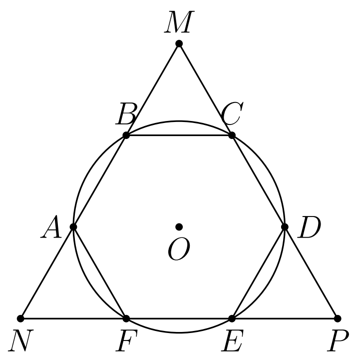
Gọi a, n theo thứ tự là số đỉnh, độ dài cạnh của đa giác đều đó, ta có $a = R\sqrt{2}$.
$\Rightarrow \sin\dfrac{180^\circ}{n} = \dfrac{a}{2R} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ \Rightarrow \dfrac{180^\circ}{n} = 45^\circ \Rightarrow n = 4$.
Vậy đa giác cần tìm là tứ giác đều (hình vuông). □

BÀI 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M và chúng cắt đường thẳng EF theo thứ tự tại N và P.

1. Chứng minh rằng $\triangle MNP$ là tam giác đều.
2. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Hình lục giác đều có số đo mỗi góc bằng $\dfrac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$.
Suy ra số đo mỗi góc ngoài bằng
$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$
Xét $\triangle MBC$, ta có
$$\widehat{BMC} = 180^\circ - (\widehat{MBC} + \widehat{MCB}) = 60^\circ.$$
Xét $\triangle AFN$, ta có
$$\widehat{ANF} = 180^\circ - (\widehat{NAF} + \widehat{NFA}) = 60^\circ.$$
Vậy $\triangle MNP$ có hai góc bằng 60° nên nó là tam giác đều.



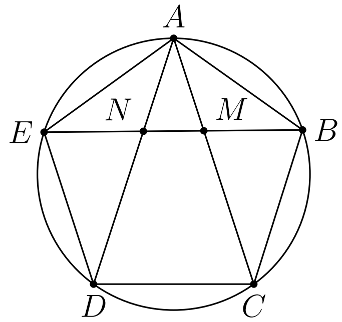
2. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$, ta có $R = \dfrac{MN}{2\sin\dfrac{180^\circ}{3}} = \dfrac{3a}{2\sin 60^\circ} = a\sqrt{3}$.

□

BÀI 3. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Hai đường chéo AC và AD cắt BE lần lượt tại M và N.

1. Tính tỉ số giữa các bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều đó.
2. Chứng minh rằng các tam giác AMN và CMB là tam giác cân.
3. Chứng minh rằng $AB \cdot BC = BM \cdot AC$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Gọi a, R, r theo thứ tự là độ dài mỗi cạnh, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp $ABCDE$.
Khi đó, ta có $R = \dfrac{a}{2\sin 36^\circ}$ và $r = \dfrac{a}{2\tan 36^\circ}$.
Vậy suy ra
$$\frac{r}{R} = \frac{\sin 36^\circ}{\tan 36^\circ} \approx \frac{4}{5}.$$

b) Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA}$.
Trong $\triangle AMN$, ta có $\widehat{AMN} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ } \overset{\frown}{EA} + \text{sđ } \overset{\frown}{BC}) = \dfrac{1}{2}(\text{sđ } \overset{\frown}{AB} + \text{sđ } \overset{\frown}{DE}) = \widehat{ANM}$.
Vậy tam giác AMN cân tại A.
Trong $\triangle CMB$, ta có $\widehat{BMC} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ } \overset{\frown}{BC} + \text{sđ } \overset{\frown}{EA}) = \dfrac{1}{2}(\text{sđ } \overset{\frown}{CD} + \text{sđ } \overset{\frown}{DE}) = \widehat{MBC}$.
Vậy tam giác CMB cân tại C.

c) Ta có $\widehat{ABM} = \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{EA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AB} = \widehat{ACB}$.
Vậy $\triangle ABC \backsim \triangle AMB$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{BM} \Rightarrow BM \cdot AC = AB \cdot BC$.

□

BÀI 4. Cho tam giác đều nội tiếp đường tròn (O) có cạnh 3 cm.

❶ Tính bán kính của đường tròn (O).

❷ Tính cạnh lục giác đều ngoại tiếp đường tròn (O).

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Bán kính của đường tròn (O) là $R = \dfrac{3}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{3}$ (cm).

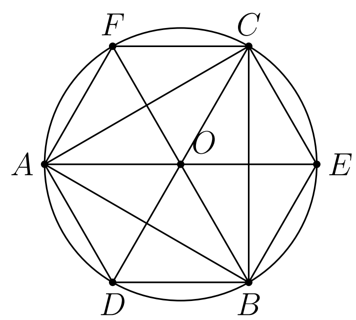
❷ Cạnh lục giác đều ngoại tiếp đường tròn (O) là $2 \cdot \sqrt{3}\tan 30^\circ = 2$ (cm).

□

BÀI 5. Cho $\triangle ABC$ đều, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi D, E, F theo thứ tự là điểm chính giữa các cung AB, BC, CA. Chứng minh rằng $ADBECF$ là lục giác đều.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì $\triangle ABC$ đều nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$.
Mà D, E, F theo thứ tự là điểm chính giữa cung AB, BC, CA nên
$$\widehat{AOD} = \widehat{DOB} = \widehat{BOE} = \widehat{EOC} = \widehat{COF} = \widehat{FOA}.$$
Do đó các tam giác AOD, DOB, BOE, EOC, COF, FOA là tam giác đều có cạnh bằng R.
Vậy $ADBECF$ có 6 cạnh bằng nhau và 6 góc bằng 120° nên là lục giác đều.

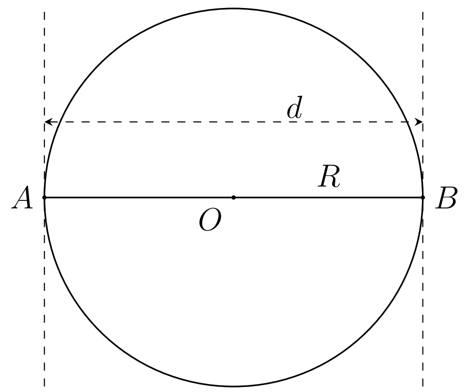


□

BÀI 9 ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Độ dài đường tròn



1. Độ dài đường tròn (hay "Chu vi hình tròn") được kí hiệu là C.
2. Độ dài C của một đường tròn bán kình R được tính theo công thức
$$\mathrm{C} = 2\pi R.$$
3. Nếu gọi d là đường kính của đường tròn ($\mathrm{d} = 2R$) thì
$$\mathrm{C} = \pi \mathrm{d}.$$

Trong đó π đọc là "pi" và $\pi \approx 3{,}14$ ($\pi = 3{,}14159265\ldots$).

2. Độ dài cung tròn

1. Đường tròn bán kính R (ứng với cung 360°) có độ dài là $2\pi R$.
2. Mỗi cung 1° bán kính R có độ dài là
$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$
3. Một cung n°, bán kính R có độ dài
$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

B CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. 1. Tính độ dài cung 60° của một đường tròn có bán kính 2 dm.
2. Tính chu vi của một vành xe đạp có đường kính 650 mm.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Độ dài cung 60° của đường tròn có bán kính 2 dm= 20 cm là
$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 20 \cdot 60}{180} = \frac{20\pi}{3} \approx 20{,}9 \text{ (cm)}.$$
2. Chu vi của vành xe đạp đường kính 650 mm là
$$\mathrm{C} = \pi d = 650\pi \approx 204{,}2 \text{ (cm)}.$$

□

VÍ DỤ 2. Tính độ dài của đường tròn, biết
1. Đường tròn có bán kính bằng 6 cm.
2. Đường tròn có đường kính 8 cm.

❸ Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$ cm.

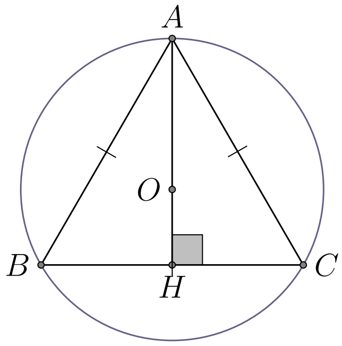
✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Độ dài đường tròn bán kính 6 cm là
$$\mathrm{C} = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 6 \approx 37{,}7 \text{ (cm)}.$$

❷ Độ dài đường tròn đường kính 8 cm là
$$\mathrm{C} = \pi d = 8\pi \approx 25{,}1 \text{ (cm)}.$$

❸

Giả sử có O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Qua A kẻ đường cao AH. Khi đó ta có
$$R = OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \text{ (cm)}.$$
Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC là
$$\mathrm{C} = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12{,}57 \text{ (cm)}.$$



□

VÍ DỤ 3. Cho $(O; OM)$. Vẽ đường tròn (O') đường kính OM. Một bán kính OA của (O) cắt (O') ở B. Chứng minh hai cung MA và MB có độ dài bằng nhau.

✍ **LỜI GIẢI.**

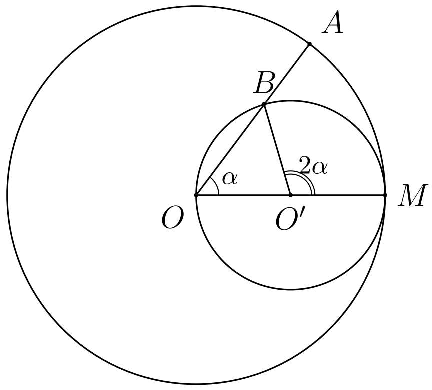
Trên (O') đặt $\widehat{MOA} = \alpha$ thì $\widehat{BO'M} = 2\alpha$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BM).

Suy ra sđ$\overset{\frown}{AM} = \alpha$, sđ$\overset{\frown}{MB} = 2\alpha$. Do đó

$$l_{\overset{\frown}{MA}} = \frac{\pi \cdot OM \cdot \alpha}{180^\circ} \quad (1)$$
$$l_{\overset{\frown}{MB}} = \frac{\pi \cdot OM \cdot 2\alpha}{180^\circ \cdot 2} = \frac{\pi \cdot OM \cdot \alpha}{180^\circ}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $l_{\overset{\frown}{MA}} = l_{\overset{\frown}{MB}}$.

Vậy hai cung $\overset{\frown}{MA}$ và $\overset{\frown}{MB}$ có độ dài bằng nhau.



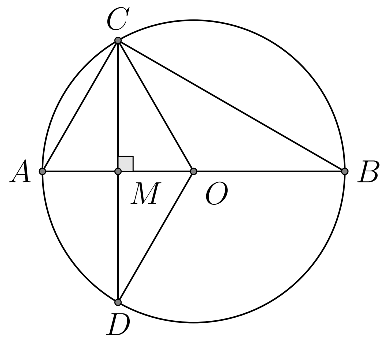
□

VÍ DỤ 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M. Giả sử $AM = 1$ cm, $CD = 2\sqrt{3}$ cm. Tính

❶ Độ dài đường tròn.

❷ Độ dài của $\overset{\frown}{CAD}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có $AB \perp CD$ tại M (giả thiết) nên $MC = MD = CD : 2 = \sqrt{3}$ (cm) (tính chất đường kính và dây cung).

Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Do đó, $\triangle ACB$ vuông tại C có đường cao CM ($CD \perp AB$ tại M).

Theo hệ thức liên hệ giữa đường cao trong tam giác vuông ACB ta có

$$\begin{aligned} & MC^2 = MA \cdot MB \\ \Rightarrow\ & MB = \frac{MC^2}{MA} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{1} = 3 \\ \Rightarrow\ & R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AM + MB) = 2 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

Độ dài đường tròn: $\text{C} = 2\pi R = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12{,}57$ (cm).

b) Ta có $AM = 1$ cm, $OA = 2$ cm $\Rightarrow MA = MO = 1$ cm.

Xét tứ giác $OCAD$ có

$$\begin{cases} MC = MD \text{ (chứng minh trên)} \\ MA = MO \text{ (chứng minh trên)} \\ CD \perp OA \text{ (giả thiết)} \end{cases} \Rightarrow OCAD \text{ là hình thoi.}$$

$\Rightarrow CA = CO = OA$ (cùng bằng 2 cm) nên $\triangle OAC$ đều

$\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 120^\circ$.

Độ dài của $\overset{\frown}{CAD}$

$$l_{\overset{\frown}{CAD}} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 120}{180} = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}19 \text{ (cm)}.$$

□

Nhận xét. *1. Trong câu a), để tính được độ dài đường tròn chúng ta cần đi tìm bán kính dựa trên việc tính độ dài của đường kính AB. Tuy nhiên, ta cũng có thể tính được R bằng cách:*

Trong tam giác vuông OMC, ta có

$OC^2 = OM^2 + MC^2 = (OA - AM)^2 + MC^2$

$\Rightarrow R^2 = (R-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow R = 2$ *(cm).*

2. Trong câu b), với yêu cầu "Tính độ dài của cung CAD", chúng ta cần thực hiện theo 2 bước

Bước 1: *Tính số đo của cung CAD, tức là tính $\widehat{COA}$.*

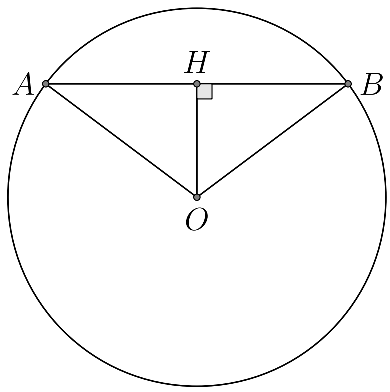
Bước 2: *Sử dụng công thức tính độ dài cung.*

VÍ DỤ 5. Cho đường tròn (O), dây $AB = 9$ cm có khoảng cách đến tâm bằng một nửa bán kính của đường tròn.

❶ Tính chu vi đường tròn.

❷ Tính độ dài cung nhỏ AB.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Kẻ $OH \perp AB$. Khi đó $HA = HB$ (tính chất đường kính và dây cung).

$$\Rightarrow HB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 9 = 4{,}5\ (\text{cm}).$$

Trong tam giác vuông OHB, ta có

— $\sin B = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ$.

— $\cos B = \dfrac{HB}{OB} \Rightarrow OB = \dfrac{HB}{\cos B} = \dfrac{4{,}5}{\cos 30^\circ} = 3\sqrt{3}$ (cm).

Chu vi đường tròn: $\mathrm{C} = 2\pi R = 2\pi \cdot 3\sqrt{3} \approx 32{,}65$ (cm).

❷ Ta có $\widehat{B} = 30^\circ$;

$$\begin{aligned}\Rightarrow \widehat{BOH} &= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ\\ \Rightarrow \widehat{AOB} &= 2\widehat{BOH} = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ\\ \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AB} &= 120^\circ.\end{aligned}$$

Độ dài cung nhỏ AB: $l_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi R n}{180} = \dfrac{\pi 3\sqrt{3}\cdot 120}{180} \approx 10{,}88$ (cm). □

Nhận xét. *1. Để tính chu vi đường tròn hoặc độ dài đường tròn, bao giờ ta cũng phải tính bán kính của nó. Bán kính này là cạnh huyền OB của tam giác vuông OHB. Tam giác đó có cạnh góc vuông OH bằng một nửa cạnh huyền. Hãy nhớ lại nếu một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng một nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó bằng 30°. Có thể chứng minh trực tiếp điều này vào bài toán:*

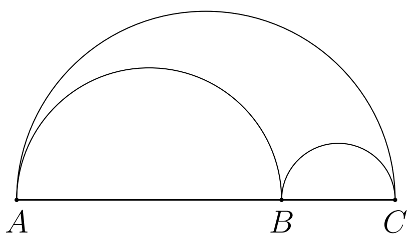
$$\sin\widehat{B} = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ.$$

2. Trong lời giải câu b), ta tính trực tiếp độ dài cung AB, đó là $\frac{1}{3}$ chu vi của đường tròn (vì $\widehat{AOB} = 120^\circ$). Nếu áp dụng công thức tính độ dài cung 120°, ta có

$$\frac{\pi\cdot R\cdot 120}{180} = \frac{\pi\cdot 3\sqrt{3}\cdot 120}{180} = 2\pi\sqrt{3}\ cm.$$

VÍ DỤ 6.

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng sao cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C (hình vẽ bên). Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC.



✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là độ dài của các nửa đường tròn đường kính AC, AB và BC. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_1 &= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot AC = \frac{\pi}{2}AC;\\ \mathrm{C}_2 &= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot AB = \frac{\pi}{2}AB;\\ \mathrm{C}_3 &= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot BC = \frac{\pi}{2}BC.\end{aligned}$$

Xét $\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = \dfrac{\pi}{2}AB + \dfrac{\pi}{2}BC = \dfrac{\pi}{2}(AB + BC) = \dfrac{\pi}{2}AC = \mathrm{C}_1$.

Vậy $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3$ (điều phải chứng minh). □

Nhận xét. *1. Người ta có thể phát biểu bài toán trên theo chiều ngược lại như sau: "Cho ba điểm A, B, C. Chứng minh rằng độ dài đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài đường tròn đường kính AB và BC. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng và điểm B nằm giữa A và C".*

2. Từ đó, ta có kết quả tổng quát: $\mathrm{C}_{(AC)} \leq \mathrm{C}_{(AB)} + \mathrm{C}_{(BC)}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Một tam giác đều và một hình vuông cùng có chu vi là 72cm. Hỏi đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi a, b lần lượt là độ dài cạnh của tam giác đều và hình vuông. Suy ra

$$\begin{aligned} 3a = 72 &\Leftrightarrow a = 24(cm);\\ 4b = 72 &\Leftrightarrow b = 18(cm). \end{aligned}$$

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều và hình vuông. Suy ra

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{3}} = \frac{24}{2\sin 60^\circ} = 8\sqrt{3}\ (\text{cm});\\ R_2 &= \frac{b}{2\sin\dfrac{180^\circ}{4}} = \frac{18}{2\sin 45^\circ} = 9\sqrt{2}\ (\text{cm}). \end{aligned}$$

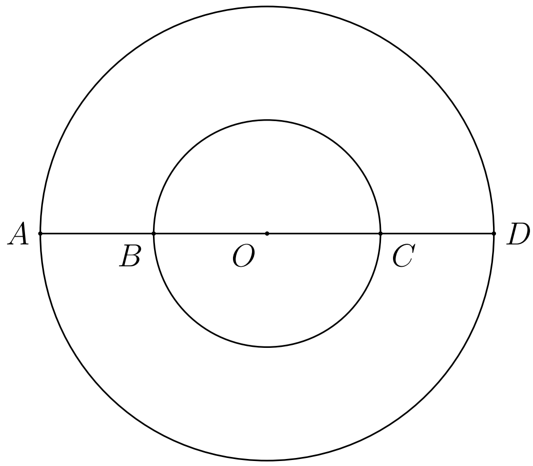
Khi đó

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_1 &= 2\pi R_1 = 16\pi\sqrt{3} \approx 87{,}06\ (\text{cm});\\ \mathrm{C}_2 &= 2\pi R_2 = 18\pi\sqrt{2} \approx 79{,}97\ (\text{cm}). \end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{C}_1 > \mathrm{C}_2$ và $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 \approx 7{,}08$. □

BÀI 2. Cho đoạn thẳng $AD = 12$cm. Các điểm B, C cùng thuộc đoạn thẳng AD sao cho $AB = CD$. Vẽ các đường tròn có đường kính theo thứ tự là AD và BC. Biết chu vi đường tròn lớn bằng ba lần chu vi đường tròn nhỏ. Tính chu vi của đường tròn nhỏ.

✍ **LỜI GIẢI.**



Ta có đường tròn lớn là đường tròn đường kính AD nên bán kính $R = AD : 2 = 6$ (cm).

Do chu vi đường tròn lớn bằng ba lần chu vi đường tròn nhỏ nên bán kính đường tròn lớn cũng gấp ba lần bán kính đường tròn nhỏ. Suy ra đường tròn đường kính BC có bán kính $r = R : 3 = 6 : 3 = 2$ (cm).

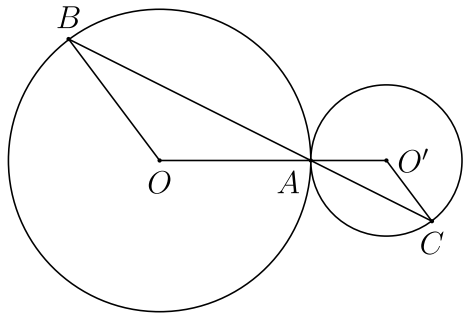
Vậy chu vi của đường tròn nhỏ là

$$\mathrm{C} = 2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$

□

BÀI 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại B, cắt đường tròn (O') tại C. Chứng minh rằng nếu $R' = \dfrac{1}{2}R$ thì độ dài của $\overset{\frown}{AC}$ bằng nửa độ dài của $\overset{\frown}{AB}$ (chỉ xét các cung AC, AB nhỏ hơn nửa đường tròn).

✍ **LỜI GIẢI.**



Xét đường tròn (O), $\triangle AOB$ cân tại O nên $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$;

Tương tự, trong đường tròn (O'), $\triangle O'AC$ cân tại O' nên $\widehat{O'AC} = \widehat{O'CA}$

Mà $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC}$ (hai góc đối đỉnh).

Do đó $\widehat{OBA} = \widehat{O'CA}$.

Xét hai tam giác OAB và $O'AC$ có

— $\widehat{OBA} = \widehat{O'CA}$ (chứng minh trên)

— $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle OAB \backsim \triangle O'AC$ (góc - góc)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AO'}{AO} = \dfrac{R'}{R}$.

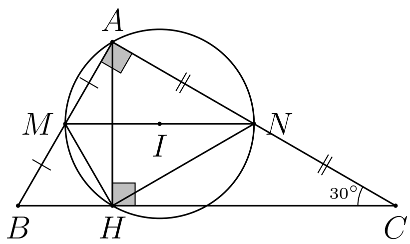
Vậy nếu $R' = \dfrac{1}{2}R$ thì độ dài của $\overset{\frown}{AC}$ bằng nửa độ dài của $\overset{\frown}{AB}$. □

BÀI 4. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A, $\widehat{C} = 30^\circ$ và $AB = 4$cm. Vẽ đường cao AH. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

❶ Chứng minh rằng tứ giác $AMHN$ nội tiếp được.

❷ Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Tam giác vuông AHB có HM là trung tuyến nên

$$MH = MA;$$

Tam giác vuông AHC có HN là trung tuyến nên

$$NH = NA.$$

Xét $\triangle MAN$ và $\triangle MHN$ có

$$\begin{cases} MA = MH \text{ (chứng minh trên)} \\ NA = NH \text{ (chứng minh trên)} \\ MN\text{: cạnh chung} \end{cases}.$$

$\Rightarrow \triangle MAN = \triangle MHN$ (cạnh - cạnh - cạnh)

$\Rightarrow \widehat{H} = \widehat{A} = 90^\circ$.

Tứ giác $AMHN$ có $\widehat{H} + \widehat{A} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên nội tiếp được đường tròn tâm I đường kính MN.

b) Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông ABC, ta có

$$\sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \text{ (cm)}.$$

Lại có MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên

$$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4 \text{ (cm)}.$$

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ có bán kính $R = \dfrac{1}{2}MN = \dfrac{1}{2}\cdot 4 = 2$ (cm).

Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMHN$ là

$$\mathrm{C} = 2\pi R = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \text{ (cm)}.$$

□

BÀI 5. Cho hình vuông $ABCD$ có $AC = 4$cm. Ở phía ngoài hình vuông vẽ các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, BC, CD, DA. Bốn nửa đường tròn đó tạo thành hình hoa bốn cánh. Tính chu vi của hình hoa ấy.

✍ **LỜI GIẢI.**

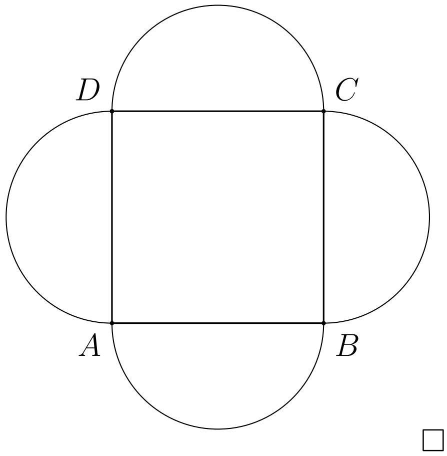
Giả sử a là độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$.

Do $AC = 4$cm nên theo định lý Py-Ta-Go, ta có

$$AC^2 = 2a^2 \Leftrightarrow 4^2 = 2a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}(\text{cm}).$$

Chu vi của hình hoa bốn cánh được tạo thành từ bốn nửa đường tròn bằng nhau

$$\mathrm{C} = 4 \cdot (\pi d : 2) = 2 \cdot \pi \cdot a = 2 \cdot \pi \cdot 2\sqrt{2} \approx 17{,}78(\text{cm}).$$



□

BÀI 10 DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Diện tích hình tròn

Diện tích hình tròn bán kính R là $S = \pi R^2$.

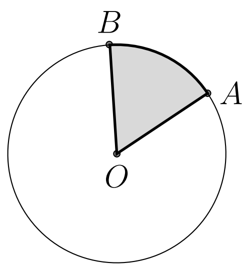
2. Diện tích hình quạt tròn

Định nghĩa 1. Hình quạt tròn là một phần hình tròn bao gồm giữa một cung tròn và hai bán kính qua hai đầu mút của cung đó.

Trong hình minh họa bên, ta có hình quạt tròn AOB (miền in đậm).

Diện tích hình quạt n° bán kính R được cho bởi:

$$S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$



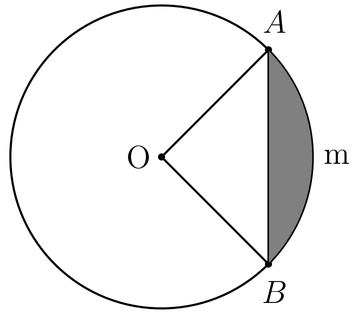
3. Diện tích hình viên phân

Định nghĩa 2. Hình viên phân là một phần hình tròn bao gồm giữa một cung tròn và dây trương cung đó.

Trong hình minh họa bên, ta có hình viên phân AmB (miền in đậm).

Diện tích hình viên phân AmB được cho bởi:

$$S_{AmB} = S_{\text{quạt}}AOB - S\triangle AOB.$$



B PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VÍ DỤ 1. (Bài 77/tr 98 - Sgk) Tính diện tích hình tròn nội tiếp một hình vuông có cạnh là 4 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hình tròn nội tiếp hình vuông có đường kính d bằng cạnh hình vuông: $d = 4$ cm.

Hình tròn nội tiếp hình vuông cạnh 4 cm là: $S = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{\pi 4^2}{4} = 4\pi \approx 12{,}56$ cm^2. □

VÍ DỤ 2. Tính diện tích hình tròn, biết:

1. Bán kính bằng 8 cm.
2. Đường kính bằng 12 cm.
3. Chu vi của đường tròn đó bằng 18π.

✍ **LỜI GIẢI.**

1. Với giả thiết, ta có: $R = 8$ cm $\Rightarrow S = \pi \cdot 8^2 = 64\pi$ cm^2.
2. Với giả thiết, ta có: $2R = 8$ cm $\Leftrightarrow R = 4$ cm $\Rightarrow S = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ cm^2.
3. Với giả thiết, ta có: $2\pi R = 18\pi \Leftrightarrow R = 9$ cm $\Rightarrow S = \pi \cdot 9^2 = 81\pi$ cm^2.

□

VÍ DỤ 3. (Bài 81/tr 99 - Sgk) Diện tích hình tròn sẽ thay đổi như thế nào nếu:

1. Bán kính tăng gấp đôi?
2. Bán kính tăng gấp ba?
3. Bán kính tăng gấp k lần $(k > 1)$?

✍ **LỜI GIẢI.**

Diện tích hình tròn có bán kính (kR) là $S = \pi(kR)^2 = k^2(\pi R)$.

1. Nếu bán kính tăng gấp đôi thì diện tích hình tròn tăng gấp 4 lần.
2. Nếu bán kính tăng gấp ba thì diện tích hình tròn tăng gấp 9 lần.
3. Nếu bán kính tăng gấp k lần thì diện tích hình tròn tăng gấp k^2 lần.

□

VÍ DỤ 4. (Bài 79/tr 98 - Sgk) Tính diện tích hình quạt tròn có bán kính bằng 6 cm và góc ở tâm tương ứng là 36°.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có ngay $S_{\text{quạt}} = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi 6^2 36}{360} \approx 11{,}3$ cm^2. □

VÍ DỤ 5. Tính diện tích hình viên phân AmB (hình trên), biết $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và bán kính đường tròn bằng 8 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có ngay $S_{AmB} = S_{\text{quạt}} AOB - S_{\triangle AOB} = \dfrac{\pi 8^2 60}{360} - \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} \approx 5{,}79$ cm^2. □

VÍ DỤ 6. (Bài 87/ tr 100 - Sgk) Lấy cạnh BC của một tam giác đều làm đường kính, vẽ một nửa đường tròn về cùng một phía với tam giác ấy đối với đường thẳng BC. Cho biết cạnh $BC = a$, hãy tính diện tích của hai hình viên phân được tạo thành.

✍ **LỜI GIẢI.**

Bạn đọc tự vẽ hình.

Gọi O là trung điểm của BC, ta có $OB = OC = \dfrac{a}{2}$.

Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm của AB và AC với đường tròn đường kính BC. Dễ thấy OAB, OEC là các tam giác đều.

Từ đó, ta có diện tích của hai hình viên phân gạch sọc là

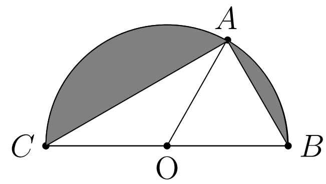
$$S = 2\left[\frac{\pi a^2}{24} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \left[\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right]a^2 \approx 0{,}045a^2.$$

□

VÍ DỤ 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 10$ m, $\widehat{B} = 60^\circ$. Vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính BC và đi qua điểm A. Tính tổng diện tích hai hình viên phân ứng với cung AB và cung AC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tổng diện tích hai hình viên phân bằng diện tích nửa hình tròn trừ đi diện tích tam giác $\triangle ABC$.



Diện tích nửa đường tròn: $\dfrac{\pi OB^2}{2} = \dfrac{\pi\cdot 100}{2} = 50\pi$ m^2.

Với $\triangle ABC$, ta có: $AC = AB\cdot\tan 60^\circ = 10\sqrt{3}$ m; $BC = 2AB = 20$ m.

Diện tích tam giác ABC: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot AC = \dfrac{1}{2}10\cdot 10\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$ m^2.

Suy ra, tổng diện tích hai hình viên phân bằng $50\pi - 50\sqrt{3} = 50(\pi - \sqrt{3})$ m^2. □

VÍ DỤ 8. (Bài 83/tr99 - Sgk)

❶ Vẽ lại hình sgk (tạo bởi các cung tròn) với $HI = 10$ cm và $HO = BI = 2$ cm. Nêu cách vẽ.

❷ Tính diện tính hình HOABINH (miền gạch sọc).

❸ Chứng tỏ rằng hình tròn đường kính NA có cùng diện tích với hình HOABINH đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

Bạn đọc tự vẽ hình

❶ Cách vẽ:

— Kẻ đường thẳng $HI = 10$ cm.

— Vẽ cung tròn HI có số đo bằng 180°.

— Lấy O thuộc đoạn HI sao cho $HO = 2$ cm. Vẽ cung tròn HO có số đo bằng 180° của đường tròn $(S_1; 5\text{cm})$.

— Lấy B thuộc đoạn HI sao cho $BI = 2$ cm. Vẽ cung tròn BI có số đo bằng 180° của đường tròn $(S_2; 1\text{cm})$.

— Vẽ cung tròn BO có số đo bằng 180° của đường tròn $(S_3; 1\text{cm})$.

❷ Ta có diện tích hình gạch sọc là

$$S = \pi\frac{HI^2}{8} + \pi\frac{OB^2}{8} - \pi\frac{HO^2}{4} = \pi\left(\frac{100}{8} + \frac{36}{8} - \frac{4}{4}\right) = 16\pi(\text{cm}^2).$$

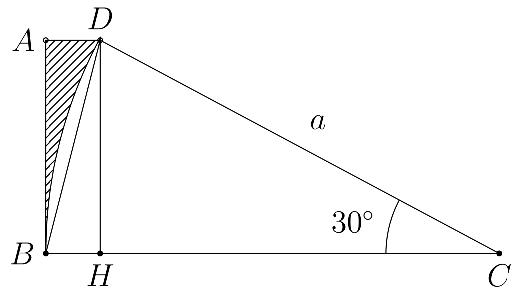
Ta có $AN = 3 + 5 = 8$ (cm).

❸ Diện tích hình quạt tròn đường kính NA là $S = \dfrac{\pi 8^2}{4} = 16\pi(\text{cm}^2)$.

□

VÍ DỤ 9. Tính diện tích của phần gạch sọc trên hình.

✍ **LỜI GIẢI.**



Diện tích phải tìm bằng hiệu của diện tích hình thang vuông $ABCD$ và hình quạt $30°$.

Kẻ $DH \perp BC$, ta được:

$DH = CD \cdot \sin 30° = \dfrac{a}{2}$, $HC = CD \cdot \cos 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = BH = BC - HC = a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó, ta có: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}\left(a + a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$ và $S_{\text{quạt}} = \dfrac{\pi a^2}{12}$.

Diện tích phải tìm:

$$S = S_{ABCD} - S_{\text{quạt}} = \frac{a^2}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{a^2}{24}\left(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi\right) \approx 0{,}025a^2.$$

□

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

BÀI 1. Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn?

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi C là độ dài chu vi của hình vuông và hình tròn.

Gọi a là độ dài cạnh hình vuồn, suy ra $C = 4a \Leftrightarrow a = \dfrac{C}{4} \Rightarrow S_{hv} = a^2 = \dfrac{C^2}{16}$.

Gọi R là bán kính của hình tròn, suy ra:

$$C = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{C}{2\pi} \Rightarrow S_{hv} = \pi R^2 = \pi\frac{C^2}{4\pi^2} = \frac{C^2}{4\pi} > \frac{C^2}{16}.$$

Vậy diện tích hình tròn lớn hơn hình vuông. □

BÀI 2. Cho $\triangle ABC$ đều nội tiếp đường tròn $(O; 6\text{cm})$. Tính diện tích viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC.

✍ **LỜI GIẢI.**

Hướng dẫn: Ta có ngay $S_{BmC} = S_{\text{quạt}}BOC - S_{\triangle BOC}$. □

BÀI 3. Hình vành khăn là phần hình tròn bao gồm giữa hai đường tròn đồng tâm. Tính diện tích hình vành khăn tạo thành bởi đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh 6 cm.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều, ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin\dfrac{180°}{3}} = \frac{6}{2\sin 60°} = 2\sqrt{3}\text{cm} \Rightarrow S_{\text{ngoại tiếp}} = \pi R^2 = \pi(2\sqrt{3})^2 = 12\pi\text{cm}^2.$$

$$r = \frac{a}{2\tan\dfrac{180°}{3}} = \frac{6}{2\tan 60°} = \sqrt{3}\text{cm} \Rightarrow S_{\text{nội tiếp}} = \pi r^2 = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi\text{cm}^2.$$

Khi đó hình vành khăn có diện tích $S = S_{\text{ngoại tiếp}} - S_{\text{nội tiếp}} = 12\pi - 3\pi = 9\pi\ \text{cm}^2$. □

BÀI 4. (Bài 84/tr 99 - Sgk)

❶ Vẽ lại hình tạo bởi các cung tròn xuất phát từ đỉnh C của tam giác đều ABC cạnh 1 cm. Nêu cách vẽ.

❷ Tính diện tích miền gạch sọc.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Cách vẽ:

— Vẽ cung CD có số đo bằng 120° của đường tròn $(A; 1\text{cm})$.

— Vẽ cung DE có số đo bằng 120° của đường tròn $(B; 2\text{cm})$.

— Vẽ cung EF có số đo bằng 120° của đường tròn $(C; 3\text{cm})$.

❷ Diện tích miền gạch sọc là $S = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi 2^2}{3} + \dfrac{\pi 3^2}{3} \approx 14{,}65(\text{cm}^2)$.

□

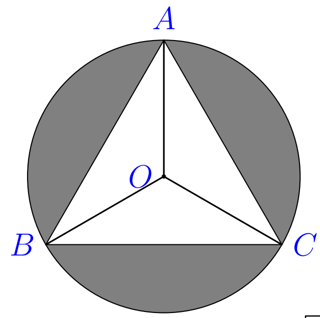
BÀI 5. Một đường tròn có độ dài là 72 cm. Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi một cạnh của tam giác đều nội tiếp và cung nhỏ bị trương.

✍ **LỜI GIẢI.**

Bán kính của đường tròn là $R = \dfrac{\text{chu vi}}{2\pi} = \dfrac{72}{\pi}$ (cm).

Diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ AB và cạnh AB là

$$S = S_{\text{quạt}} - S_{\triangle AOB} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{72^2}{3\pi} - \frac{\sqrt{3}\cdot 72^2}{4\pi^2} \approx 547\ (\text{cm}^2).$$



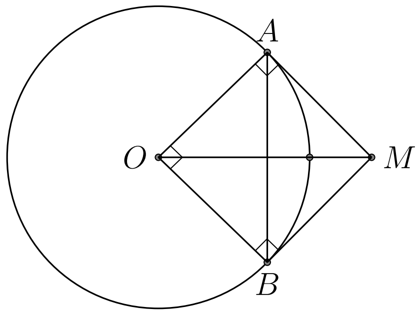
□

BÀI 6. Cho đường tròn $(O; 2\text{cm})$, một điểm M có $MO = 2\sqrt{2}$ cm. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng MA, MB và cung nhỏ AB.

✍ **LỜI GIẢI.**

Các tam giác OBM, OAM là các tam giác vuông cân. Do đó, tứ giác $OBMA$ là hình vuông. Gọi S là diện tích của hình giới hạn bởi MA, MB và cung nhỏ AB. Ta có

$$\begin{aligned} S &= S_{OBMA} - S_{\text{quạt}}OAB \\ &= OA \cdot BM - \frac{\pi R^2 \cdot 90}{360} \\ &= 2\cdot 2 - \frac{\pi \cdot 4}{4} \\ &= 4 - \pi \approx 0{,}858(\text{cm}^2). \end{aligned}$$

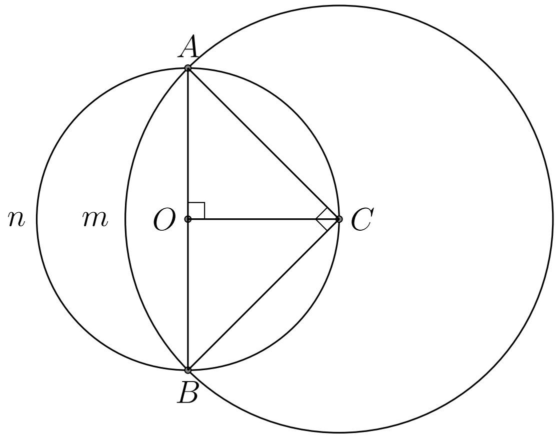


□

BÀI 7. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, C là điểm chính giữa của cung AB. Vẽ cung AB có tâm C bán kính CA. Tính diện tích hình trăng giới hạn bởi cung AB của đường tròn (C) và cung AB không chứa C của đường tròn (O).

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi $S_{\text{trăng}}$ là diện tích cần tìm. Ta có



$$S_{\text{trăng}} = S_{\text{viên phân}} AnB - S_{\text{viên phân}} AmB,$$

Trong đó: $S_{\text{viên phân}} AnB = \frac{1}{2}\pi R^2$;

$$\begin{aligned} S_{\text{viên phân}} AmB &= S_{\text{quạt}} CAB - S_{\triangle CAB} \\ &= \frac{90}{360}\pi(R\sqrt{2})^2 - R^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi R^2 - R^2 \approx 0,57R^2. \end{aligned}$$

Suy ra, diện tích cần tìm là $S_{\text{trăng}} = \frac{1}{2}\pi R^2 - 0,57R^2 \approx R^2$. □

BÀI 11 ÔN TẬP CHƯƠNG III

BÀI 1. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Lấy $M \in (O)$ với $AM < BM$. Trên cạnh MB lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Gọi OD là bán kính vuông góc với AB (M và D ở hai bên đường thẳng AB)

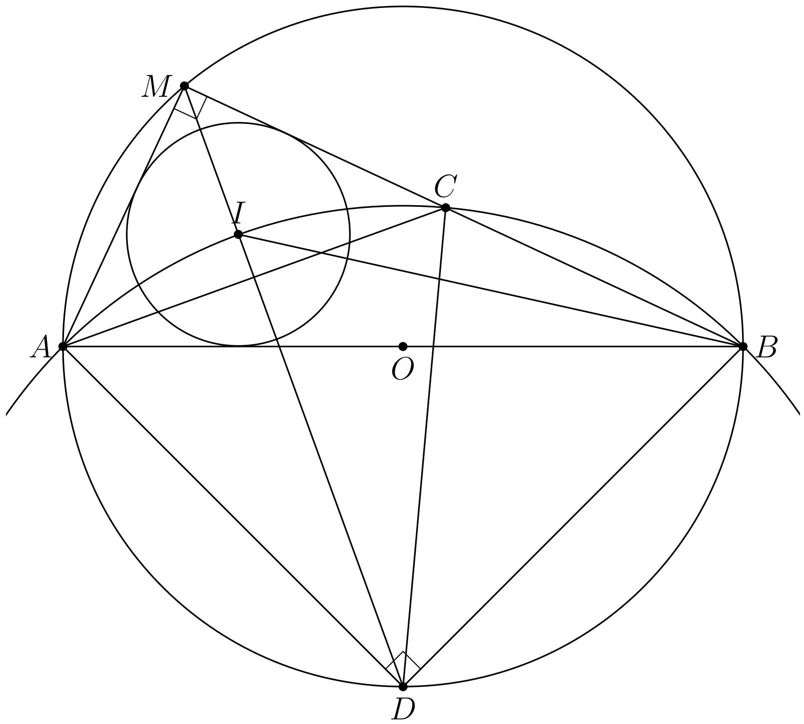
❶ Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tính theo R độ dài các cạnh của $\triangle ABD$.

❷ Chứng tỏ MD là phân giác $\widehat{AMB}$ và $MD \perp AC$.

❸ Chứng minh rằng D là tâm của đường tròn (ABC).

❹ Đường tròn (ABC) cắt MD tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Vì M thuốc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Tương tự ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$, và $OD \perp AB$ nên D nằm chính giữa cung AB, suy ra $DA = DB$.
Theo định lý Pythagore, $AB^2 = DA^2 + DB^2 \Leftrightarrow (2R)^2 = 2DA^2 \Leftrightarrow DA = DB = R\sqrt{2}$.

❷ Vì $OD \perp AB$ nên D nằm chính giữa cung AB, hay sđ$\overset{\frown}{DA} =$ sđ$\overset{\frown}{DB}$,
suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{DMB}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau).
Vậy MD là phân giác $\widehat{AMB}$.
Mặt khác $MA = MC$ nên $\triangle MAC$ cân tại M nên $MD \perp AC$ (trong tam giác cân đường phân giác còn là đường cao).

❸ Theo câu b), ta có MD là đường trung trực AC nên $DA = DC = DB$, khi đó D là tâm của đường tròn (ABC).

❹ Vì D là tâm của đường tròn (ABC) và $MD \perp AC$ nên sđ$\overset{\frown}{IA} =$ sđ$\overset{\frown}{IC}$,
suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau).

Khi đó, BI là tia phân giác góc ABI.

Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

□

BÀI 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE của đường tròn (O) (D, E thuộc đường tròn (O); D nằm giữa A và E, tia AD nằm giữa hai tia AB, AO).

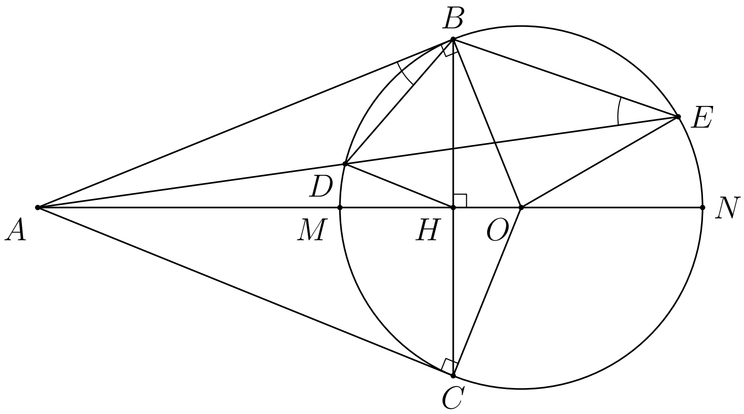
❶ Chứng minh rằng A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm của đường tròn này.

❷ Chứng minh rằng $AB^2 = AD \cdot AE$.

❸ Gọi H là giao điểm của OA và BC. Chứng minh rằng $\triangle AHD \backsim \triangle AEO$ và tứ giác $DEOH$ nội tiếp.

❹ Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại M, N (M nằm giữa A và O). Chứng minh rằng $\dfrac{EH}{AN} = \dfrac{MH}{AD}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có: AB, AC là hai tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp OB$, $AC \perp OC$,

suy ra $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^\circ$.

Vậy tứ giác $OBAC$ nội tiếp đường tròn đường tròn đường kính OA có tâm K là trung điểm OA.

❷ Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$, có

$$\widehat{BAE}: \text{ chung}$$
$$\widehat{ABD} = \widehat{BEA} (\text{ góc nội tiếp và góc tiếp tuyến cùng chắn cung } BD).$$

nên $\triangle ABD \backsim AEB$ (g-g), suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB}$

Vậy $AB^2 = AD \cdot AE$.

❸ Trong tam giác vuông ABO, ta có $AB^2 = AH \cdot AO$, do đó $AH \cdot AO = AD \cdot AE (= AB^2)$.

Suy ra, $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AO}{AE}$ và $\widehat{DAH}$: chung

nên $\triangle AHD \backsim \triangle AEO$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}$.

Do đó tứ giác $DEOH$ nội tiếp (tứ giác có góc trong bằng góc đối ngoài).

❹ Ta có $\widehat{DEM} = \dfrac{\widehat{DOM}}{2}$, $\widehat{DOM} = \widehat{DEH} \Rightarrow \widehat{DEM} = \dfrac{\widehat{DEH}}{2} \Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{MEH}$.

Suy ra EM là đường phân giác của $\triangle EAH \Rightarrow \dfrac{EH}{AE} = \dfrac{MH}{AM}$ (1).

Mặt khác $\triangle AEM \backsim \triangle AND$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AN} = \dfrac{AM}{AD}$ (2).

Từ $(1),(2)$ cho : $\dfrac{EH}{AE} \cdot \dfrac{AE}{AN} = \dfrac{MH}{AM} \cdot \dfrac{AM}{AD}$.

Vậy $\dfrac{EH}{AN} = \dfrac{MH}{AD}$.

□

BÀI 3. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E. Hai tiếp tuyến EM và Bx của (O) cắt nhau tại D (M thuộc (O)).

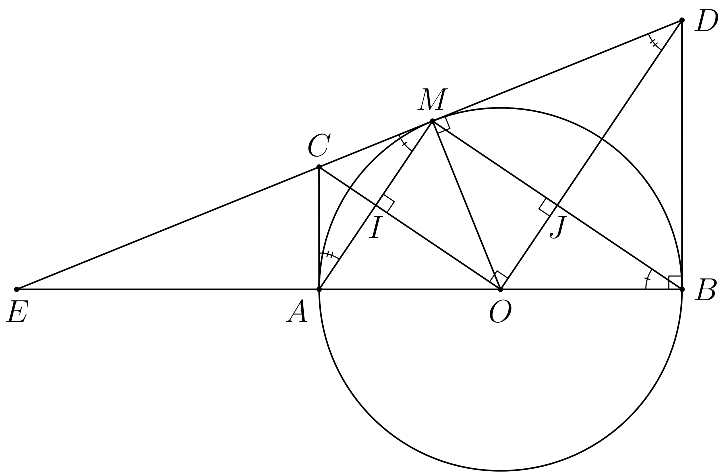
❶ Chứng minh rằng 4 điểm O, M, D, B cùng thuộc một đường tròn.

❷ Chứng minh $\triangle EMA \backsim \triangle EBM$, suy ra $EM^2 = EO^2 - R^2$.

❸ Trên đoạn ME lấy điểm C sao cho hai góc $\widehat{CAM}$, $\widehat{EDO}$ bằng nhau.
Chứng minh rằng $OC \parallel MB$.

❹ Giả sử M là trung điểm đoạn ED. Tính EM theo R.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Vì EM và BD là tiếp tuyến với đường tròn (O) nên $\widehat{DMO} = \widehat{DBO} = 90°$.
Vậy tứ giác $DMOB$ nội tiếp, suy ra 4 điểm O, M, D, B cùng thuộc một đường tròn.

❷ Xét hai tam giác $\triangle EMA$ và $\triangle EBM$, ta có

$$\widehat{CEA}: \text{ chung}$$
$$\widehat{EMA} = \widehat{MBA} \text{ (góc nội tiếp và góc tiếp tuyến cùng chắn cung } MA).$$

Vậy $\triangle EMA \backsim \triangle EBM$.

Khi đó $\dfrac{EM}{EB} = \dfrac{EA}{EM} \Leftrightarrow EM^2 = EA \cdot EB = (EO + R)(EO - R) = EO^2 - R^2$.

Suy ra $EM^2 = EO^2 - R^2$.

❸ Ta có $\widehat{CAM} = \widehat{EDO}$.

Mà $\widehat{CMA} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp và góc tiếp tuyến cùng chắn cung MA)

$\widehat{MDO} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MA trong tứ giác nội tiếp $DMOB$).

Suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{CMA}$, nên $\triangle CAM$ cân tại C, do đó $CM = CA$.

Mặt khác $OA = OM = R$, suy ra OC là đường trung trực của MA, do đó $OC \perp MA$.

Mà $MB \perp MA$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Vậy $OC \parallel MB$.

❹ Gọi I là giao điểm của CO và AM; J là giao điểm của DO và BM.
Vì $CO \perp AM$; $DO \perp BM$ nên tứ giác $MIOJ$ là hình chữ nhật vì $\widehat{M} = \widehat{I} = \widehat{J}$.
Suy ra $MA \parallel OD$, mà M là trung điểm của ED nên A là trung điểm của EO.
Vậy $EM^2 = EO^2 - R^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow EM = R\sqrt{3}$.

□

BÀI 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi đường tròn $(I; r)$ đường tròn nội tiếp tam giác ABC, H là tiếp điểm của AB với đường tròn (I), D là giao điểm của AI với đường tròn (O), DK là đường kính của đường tròn (O). Gọi d là độ dài của OI. Chứng minh rằng

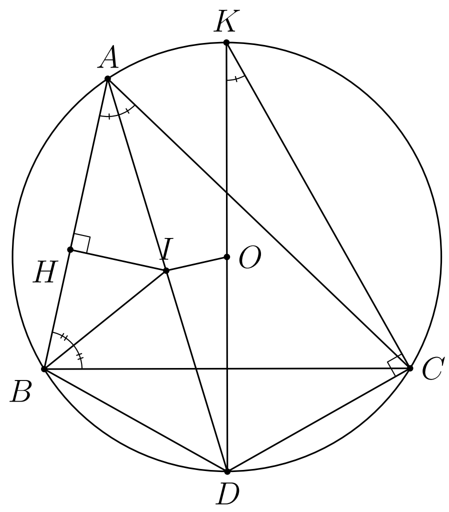
a) $\triangle AHI \backsim \triangle KCD$.

b) $DI = DB = DC$.

c) $IA \cdot ID = R^2 - d^2$.

d) $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lí Euler).

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét hai tam giác $\triangle AHI$ và $\triangle KCD$.
$\widehat{AHI} = 90^\circ$ (H là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với cạnh tam giác),
$\widehat{KCD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Suy ra $\widehat{AHI} = \widehat{KCD}$ (1).
Vì AI là tia phân giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.
Mà $\widehat{DKC} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{DC}$).
Do đó $\widehat{DKC} = \widehat{BAD}$ (2).
Từ (1) và (2), $\triangle AHI \backsim \triangle KCD$.

❷ Vì AI là tia phân giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$, do đó $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{DB}$ (tính chất góc nội tiếp).
Suy ra $DB = DC$ (3).
Mặt khác $\widehat{BID} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$ (góc ngoài tam giác).
$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$.
mà $\widehat{IBC} = \widehat{IBD}$ và $\widehat{IBA} = \widehat{IAC} = \widehat{CBD}$.
Nên $\widehat{BID} = \widehat{IBD}$, do đó tam giác DBI cân tại D, suy ra $DI = DB$ (4).
Từ (3) và (4), $DI = DB = DC$.

❸

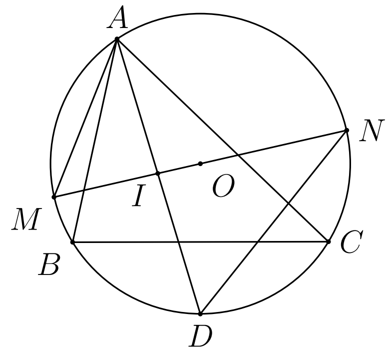
Gọi M, N là giao điểm của IO với đường tròn (O).

Xét hai tam giác $\triangle MAI$ và $\triangle DNI$.

$\widehat{MAI} = \widehat{IND}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MD}$).

$\widehat{MIA} = \widehat{DIN}$ (đối đỉnh).

Suy ra $\triangle MAI \backsim \triangle DNI$, do đó $\dfrac{IA}{IN} = \dfrac{IM}{ID}$.



Khi đó $IA \cdot ID = IM \cdot IN = (OM - OI)(ON + OI) = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$.

❹ Theo câu a), ta có $\triangle AHI \backsim \triangle KCD$,

suy ra $\dfrac{AI}{KD} = \dfrac{IH}{CD} \Rightarrow AI \cdot CD = IH \cdot KD = 2Rr \Leftrightarrow AI \cdot ID = 2Rr$ (do $DI = DC$).

mà $IA \cdot ID = R^2 - d^2$.

Vậy $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lí Euler).

□

BÀI 5. Cho điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn đó (Ax nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn). Tia phân giác của góc CAx cắt nửa đường tròn tại D. Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E. Kẻ EH vuông góc với Ax tại H.

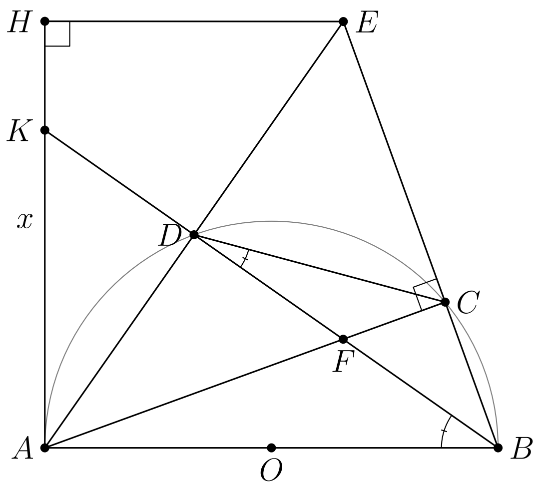
❶ Chứng minh tứ giác $AHEC$ nội tiếp đường tròn.

❷ Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$.

❸ Chứng minh tam giác ABE cân.

❹ Tia BD cắt AC và Ax lần lượt tại F và K. Chứng minh $AKEF$ là hình thoi.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{ACE} = 90^\circ$ (kề bù).

Xét tứ giác $AHEC$ ta có $\widehat{ACE} = \widehat{AHE} = 90^\circ$, suy ra tứ giác $AHEC$ nội tiếp đường tròn đường kính AE (tổng hai góc đối diện bằng 180°).

❷ Ta có $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{BDC} = \widehat{DAC}$ (1) (cùng nhìn cạnh DC).
Lại có $\widehat{ABD} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ (góc nội tiếp); $\widehat{DAx} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).
Suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{DAx}$.
Mà $\widehat{DAx} = \widehat{DAC}$ (do là phân giác).
Suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{DAC}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$.

❸ Xét $\triangle DAB$ và $\triangle DEB$ có

$\widehat{ADB} = \widehat{EDB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn – kề bù).
BD chung.
$\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (cmt).

Suy ra $\triangle DAB = \triangle DEB$ (g-c-g).
$\Rightarrow BA = BE$(tương ứng).
Vậy tam giác ABE cân tại B.

❹ Theo câu c), ta có $\triangle DAB = \triangle DEB \Rightarrow DA = DE \Rightarrow D$ là trung điểm AE (3).
Xét $\triangle DAF$ và $\triangle DAK$ có

$\widehat{ADF} = \widehat{ADK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn – kề bù).
AD chung.
$\widehat{DAF} = \widehat{DAK}$ (do AD là phân giác).

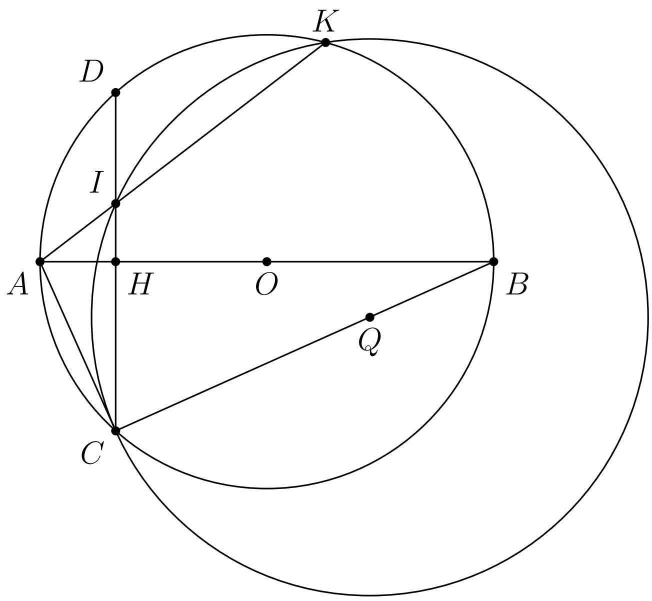
Suy ra $\triangle DAF = \triangle DAK$ (g-c-g).
$\Rightarrow DK = DF$(tương ứng).
$\Rightarrow D$ là trung điểm KF (4).
Từ (3) và (4) ta có $AKEF$ là hình bình hành (tứ giác có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường). Mà $AE \perp KF \Rightarrow$, suy ra $AKEF$ là hình thoi.

□

BÀI 6. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB cố định. H là điểm cố định thuộc đoạn OA (H không trùng O và A). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tâm O tại C và D. Gọi K là điểm tùy ý thuộc cung lớn CD (K không trùng các điểm $C; D$ và B). Gọi I là giao điểm của AK và CD.

❶ Chứng minh tứ giác $HIKB$ nội tiếp đường tròn.
❷ Chứng minh $AI \cdot AK = AH \cdot AB$.
❸ Chứng minh khi điểm K thay đổi trên cung lớn CD của đường tròn tâm O thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KCI luôn thuộc một đường thẳng cố định.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Tứ giác $HIKB$ có $\widehat{IHB} = 90^\circ$ (theo giả thiết).
Mặt khác $\widehat{IKB} = \widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra tứ giác $HIKB$ nội tiếp đường tròn (tổng hai góc đối diện bằng 180°)(đpcm).

❷ Xét $\triangle AIB$ và $\triangle AHK$ có góc A chung, có $\widehat{IKH} = \widehat{IBH}$ (cùng chắn cung HI của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $HIKB$). Suy ra $\triangle AIB$ đồng dạng với $\triangle AHK$. Suy ra $\dfrac{AI}{AH} = \dfrac{AB}{AK} \Rightarrow AI \cdot AK = AH \cdot AB$(đpcm).

❸ Đường kính AB vuông góc với dây CD tại H (gt), suy ra $HC = HD \Rightarrow AC = AD$.
Suy ra sđ$\overset{\frown}{AC}$ = sđ$\overset{\frown}{AD}$.
Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau).
Mặt khác tia CA và điểm K nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng CI.
Suy ra CA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KCI tại tiếp điểm C.
(Có thể chứng minh $AC^2 = AI \cdot AK$ để suy ra CA là tiếp tuyến).
Gọi Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KCI, suy ra Q nằm trên đường thẳng vuông góc với CA tại C.
Mặt khác $CB \perp CA$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Vậy Q thuộc đường thẳng CB cố định (đpcm).

□

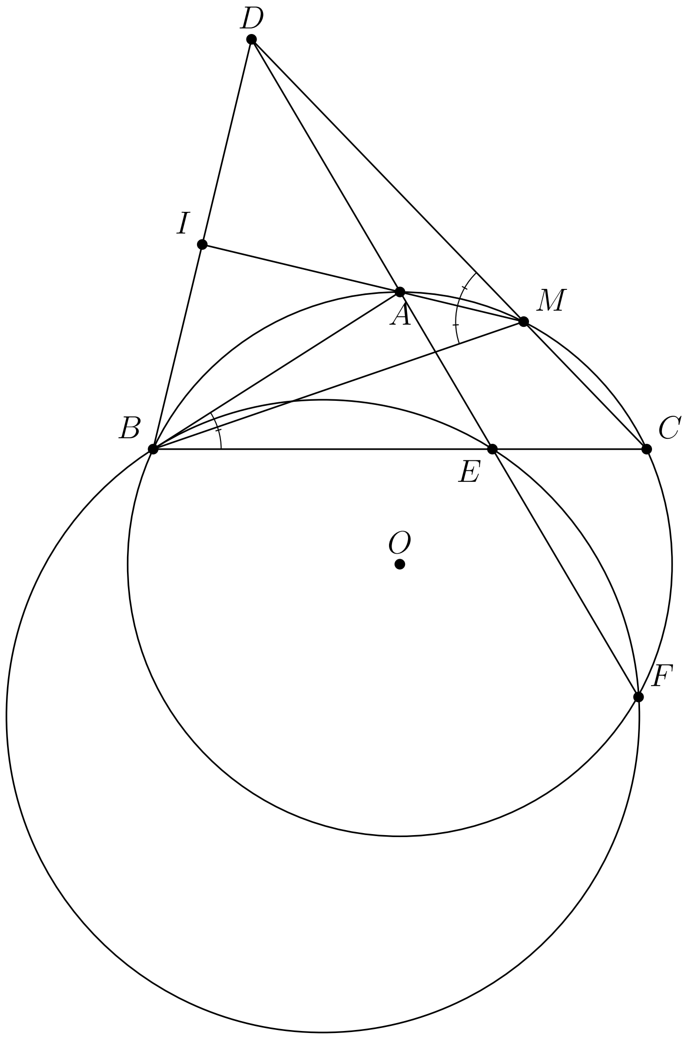
BÀI 7. Cho đường tròn (O) bán kính R và một dây cung BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D.

❶ Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và MA là tia phân giác của góc $\widehat{BMD}$.

❷ Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và góc $\widehat{BCD}$ có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

❸ Tia DA cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F, Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có $\widehat{MAC} + \widehat{MCA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overparen{MC} + \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overparen{AM} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overparen{AC} = \widehat{ABC}$.

Mặt khác $\widehat{AMD} = \widehat{MAC} + \widehat{MCA}$ (góc ngoài của tam giác ACM) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AMD}$.

Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ACM} = \widehat{AMB} = \widehat{AMD} \Rightarrow MA$ là tia phân giác của góc $\widehat{BMD}$.

❷ Do $MI \perp BD \Rightarrow$ tam giác MBD cân tại M.

Suy ra MI là đường trung trực của $BD \Rightarrow AB = AD$,

mà $AB = AC \Rightarrow AB = AC = AD \Rightarrow A$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

❸ Trong tam giác vuông MID ta có $\widehat{IDM} + \widehat{IMD} = 90^o \Rightarrow \widehat{IDM} = 90^o - \widehat{IDM}$.

Vì $\widehat{IMD} = \widehat{ABC}$ (không đổi) nên $\widehat{IDM}$ không đổi hay $\widehat{BDM}$ không đổi.

Xét đường tròn nội tiếp tam giác BEF ta có $\widehat{BFE}$ là góc nội tiếp chắn cung BE.

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{AFB}$

nên AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

□

BÀI 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn tâm O đường kính AB cắt các đoạn BC và OC lần lượt tại D và I. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên OC; AH cắt BC tại M.

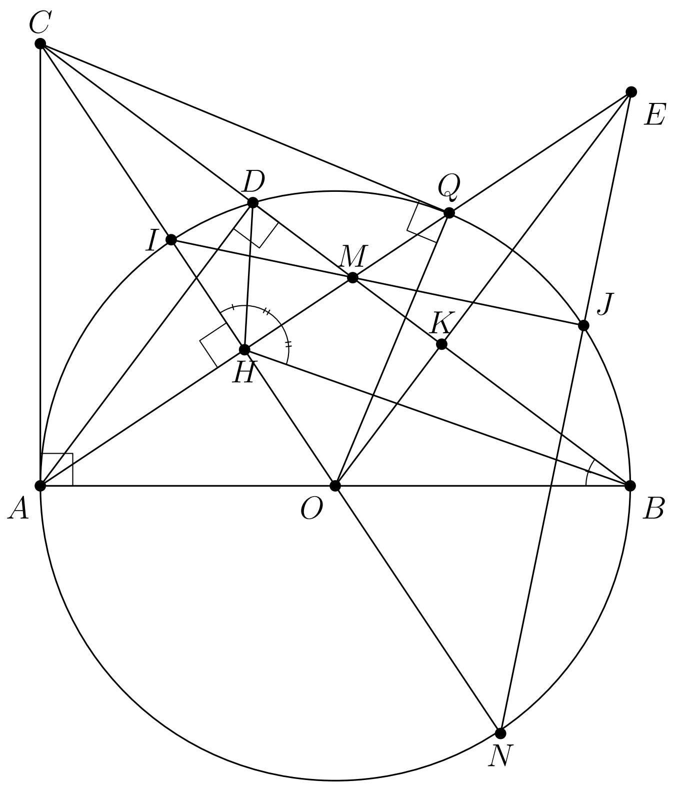
❶ Chứng minh tứ giác $ACDH$ là nội tiếp và $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.

❷ Chứng minh hai tam giác OHB và OBC đồng dạng với nhau và HM là tia phân giác của góc $\widehat{BHD}$.

❸ Gọi K là trung điểm của BD chứng minh $MD \cdot BC = MB \cdot CD$ và $MB \cdot MD = MK \cdot MC$.

❹ Gọi E là giao điểm của AM và OK; J là giao điểm của IM và (O) (J khác I). Chứng minh hai đường thẳng OC và EJ cắt nhau tại một điểm trên (O).

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có $\widehat{AHC} = 90^\circ$ ($AH \perp OC$).
$\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).
Vậy $AHDC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC.
$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{CHD}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung CD).
Mặt khác $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AID}$ (2). (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).
Từ $(1), (2) \Rightarrow \widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.

❷ Xét hai tam giác $\triangle AHO$ và $\triangle CAO$ có

$$\widehat{CHO} = \widehat{CAO} = 90^\circ.$$
$$\widehat{HAO} = \widehat{ACO} \text{ (cùng phụ góc } \widehat{COA}).$$

Do đó, $\triangle AHO \backsim \triangle CAO$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AO}{CO} = \dfrac{HO}{AO}$.
Mà $OA = OB$ vì AB đường kính đường tròn tâm (O).
Vậy $\dfrac{OB}{CO} = \dfrac{HO}{OB}$.
Xét $\triangle OHB$ và $\triangle OBC$ có

$$\widehat{HOB} = \widehat{BOC} \text{(chung góc} \widehat{O})$$
$$\frac{OB}{CO} = \frac{HO}{OB}.$$

Vậy $\triangle OHB \backsim \triangle OBC$ (c-g-c).

Ta có $\widehat{CDA} = \widehat{CHD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ACDH$).

$\widehat{DBA} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung của đường tròn tâm O).

Mặt khác $\triangle OHB \backsim \triangle OBC \Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{CBO} = \widehat{DBA}$.

Vậy $\widehat{OHB} = \widehat{DHC}$ mà $\widehat{OHB}+\widehat{BHM} = \widehat{DHC}+\widehat{DHM} = 90^\circ$ $(AH \perp OC)$. $\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{DHM} \Rightarrow$ HM là đường phân giác của góc $\widehat{BHD}$.

3. Xét tam giác BHD, vì HM là phân giác của $\widehat{BHD} \Rightarrow \dfrac{HB}{HD} = \dfrac{MB}{MD}$ $(\star)$.

Mặt khác $HM \perp HC \Rightarrow HC$ là đường phân giác ngoài tam giác BHD.

$\Rightarrow \dfrac{HB}{HD} = \dfrac{CB}{CD}$ $(\star\star)$.

Từ $(\star)$ và $(\star\star) \Rightarrow \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{MB}{MD} \Rightarrow CB \cdot MD = CD \cdot MB$.

Gọi Q là giao điểm của AM với (O)

vì $AH \perp OC \Rightarrow CQ$ là tiếp tuyến của của $(O) \Rightarrow \widehat{CQO} = 90^\circ$.

Vậy năm điểm $C; O; A; K; Q$ nội tiếp một đường tròn đường kính CO.

Bốn điểm $B; A; D; Q$ cùng thuộc $(O) \Rightarrow MB \cdot MD = MA \cdot MQ$ (3).

Năm điểm $C; O; A; K; Q$ cùng thuộc một đường tròn $(O) \Rightarrow MC \cdot MK = MA \cdot MQ$ (4).

Từ (3) và (4) $\Rightarrow MB \cdot MD = MC \cdot MK$.

4. Gọi N là giao điểm của CO và $(O) \Rightarrow \widehat{IJN} = 90^\circ$ (5).

Mà $MI \cdot MJ = MD \cdot MB = MK \cdot MC$ (chứng minh trên).

Vậy $\triangle MCI \backsim \triangle MKJ$

$\Rightarrow \widehat{MCI} = \widehat{MJK} = \widehat{MEO} \Rightarrow MKJE$ nội tiếp.

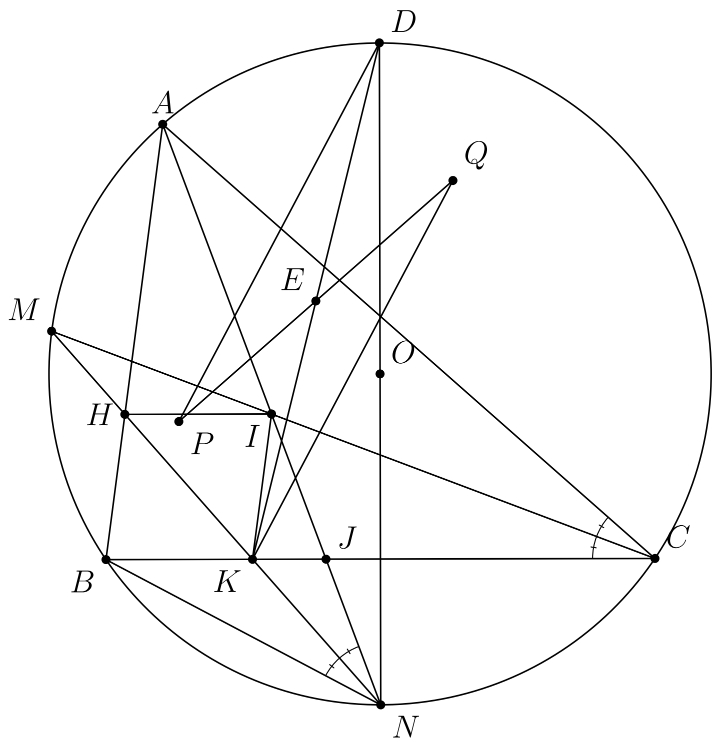
$\Rightarrow \widehat{EJM} = 90^\circ(6)$ Từ (5) và (6) $\Rightarrow E; J; N$ thẳng hàng.

□

BÀI 9. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM. cắt nhau tại điểm I. Dây MNcắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
4. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

Vì M là điểm chính giữa cung nhỏ AB của (O) (giả thiết) nên

sđ$\overset{\frown}{AM} =$ sđ$\overset{\frown}{MB} \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{BCM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Xét tứ giác $CNKI$ ta có

$\widehat{INK} = \widehat{ICK}$(vì $\widehat{ANM} = \widehat{BCM}$)

$\Rightarrow CNKI$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau).

Vậy C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

❷ Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.

Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) (giả thiết)

$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{BN} =$ sđ$\overset{\frown}{NC}$

$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{NBC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Xét $\triangle BMN$ và $\triangle KBN$ ta có

$\widehat{BNM}$ là góc chung.

$\widehat{BMN} = \widehat{NBK}$ (vì $\widehat{BMN} = \widehat{NBC}$)

$\Rightarrow \triangle BMN \backsim \triangle KBN$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{NB}{NK} = \dfrac{NM}{NB}$.

Vậy $NB^2 = NK \cdot NM$.

❸ Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

• Chứng minh $BHIK$ là hình bình hành.

Gọi J là giao điểm của AN và BC.

Ta có sđ$\overset{\frown}{AM} =$ sđ$\overset{\frown}{MB}$ (cmt).

$\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BCM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow CM$ là phân giác của $\widehat{ACB} \Rightarrow CI$ là phân giác trong của $\triangle CAJ$.

$\Rightarrow \dfrac{IA}{IJ} = \dfrac{CA}{CJ}$ (1).

Ta có sđ$\overset\frown{AM}$ = sđ$\overset\frown{MB}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{BNM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow NM$ là phân giác của $\widehat{ANB}$.

$\Rightarrow NH$ là phân giác trong của $\triangle NAB \Rightarrow \dfrac{HA}{HB} = \dfrac{NA}{NB}$ (2).

Ta có sđ$\overset\frown{BN}$ = sđ$\overset\frown{NC}$

$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{CAN}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Xét $\triangle CAJ$ và $\triangle NAB$ ta có

$\widehat{ACJ} = \widehat{ANB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AB}$)

$\widehat{BAN} = \widehat{CAJ}$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle CAJ \sim \triangle NAB$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{CA}{NA} = \dfrac{CJ}{NB} \Rightarrow \dfrac{CA}{CJ} = \dfrac{NA}{NB}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{IA}{IJ} = \dfrac{HA}{HB} \Rightarrow HI \parallel BJ$ (định lí Thales đảo) hay $HI \parallel BK$ (4).

Chứng mình tương tự các ý ở trên, ta được $KI \parallel BH$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra $BHIK$ là hình bình hành.

• Chứng minh $BH = BK$.

Ta có $\triangle KBN \backsim \triangle BMN$ (cmt)

$\Rightarrow \dfrac{BK}{BM} = \dfrac{BN}{MN} \Rightarrow BK = \dfrac{BM.BN}{MN}$ (6).

Chứng minh tương tự câu b) ta có

$\triangle HMB \backsim \triangle BMN$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{BN} = \dfrac{BM}{MN} \Rightarrow BH = \dfrac{BM \cdot BN}{MN}$ (7).

Từ (6) và (7) suy ra $BH = BK$.

Mà $BHIK$ là hình bình hành nên $BHIK$ là hình thoi.

4 Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Ta có $\widehat{NBK} = \widehat{BMK}$ (cmt) $\Rightarrow BN$ là tiếp tuyến tại B của $(P) \Rightarrow BN \perp BP$.

Mà $BN \perp BD$ (vì $\widehat{DBN} = 90^\circ$ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm (O)

nên B, P, D thẳng hàng.

Ta có $\triangle PBK$ cân tại P $(PB = PK) \Rightarrow \widehat{BPK} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{PBK}$ (8).

Ta có

$$\begin{cases} NB = NC \left(s\varnothing\overset\frown{NB} = s\varnothing\overset\frown{NC}\right) \\ OB = OC \end{cases}$$

$\Rightarrow ON$ là đường trung trực của đoạn $BC \Rightarrow DB = DC$ (D thuộc đường thẳng ON)

$\Rightarrow \triangle DBC$ cân tại $D \Rightarrow \widehat{BDC} = 180^o - 2 \cdot \widehat{DBC}$ (9).

Từ (8) và (9) suy ra $\widehat{BPK} = \widehat{BDC}$.

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $PK \parallel DC \Rightarrow PK \parallel DQ$ (10).

Chứng minh tương tự ta có C, Q, D thẳng hàng và $QK \parallel DP$ (11).

Từ (10) và (11) suy ra $DPKQ$ là hình bình hành.

Mà E là trung điểm của đường chéo PQ nên E cũng là trung điểm của đường chéo DK.

Vậy D, E, K thẳng hàng.

□

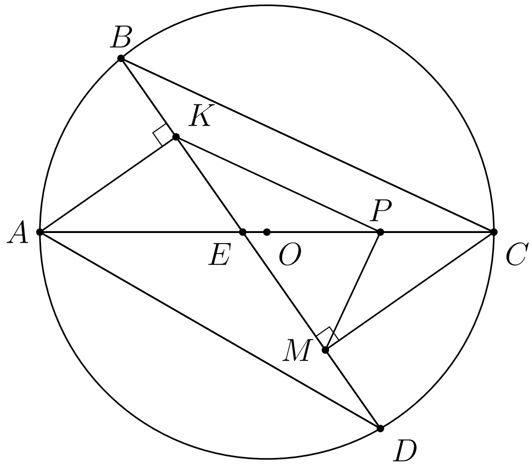
BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AC = 2R$. Gọi K và M lần lượt là chân đường cao hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn $BE (K \neq B, K \neq E)$. Đường thẳng qua K song song với BC cắt AC tại P.

❶ Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.

❷ Chứng minh $KP \perp PM$.

❸ Biết $\widehat{ABD} = 60°$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AKPD$ có $\widehat{APK} = \widehat{ACB}$ (2 góc ở vị trí đồng vị)

Mặt khác: $\widehat{ACB} = \widehat{ADK}$(góc nội tiêó cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{APK}$

$\Rightarrow ADPK$ là tứ giác nội tiếp.

❷ Chứng minh $KP \perp PM$.

Theo câu a), tứ giác $AKPD$ nội tiếp nên $\widehat{APD} = \widehat{AKD} = 90°$ và $\widehat{DKP} = \widehat{DAP}$

Xét tứ giác $DMPC$ có $\widehat{DMC} = \widehat{DPC} = 90°$

$\Rightarrow DMPC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{PMK} = \widehat{DCA}$

mà $\widehat{DCA} + \widehat{DAC} = 90°$ và $\widehat{PMK} + \widehat{PKM} = 90°$

$\Rightarrow KP \perp PM$ (đpcm)

❸ Biết $\widehat{ABD} = 60°$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x .

Xét tam giác ADC vuông tại D có $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 60°$ nên

$AD = 2R.\sin 60 = R\sqrt{3}$ và $CD = 2R.\cos 60 = R$.

Xét tam giác vuông AKB có $AB = \dfrac{AK}{\sin 60} = \dfrac{2\sqrt{3}x}{3}$.

Xét tam giác ABC vuông tại C có $BC = \sqrt{4R^2 - \dfrac{4x^2}{3}}$.

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, ta có:

$AC.BD = AD.BC + AB.CD$

$\Leftrightarrow 2R.BD = R\sqrt{3}\sqrt{4R^2 - \dfrac{4x^2}{3}} + \dfrac{2\sqrt{3}x}{3}.R$

$$\Leftrightarrow BD = \sqrt{3R^2 - x^2} + \frac{x}{\sqrt{3}}$$

□

BÀI 11.

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (C) tâm O bán kính R. Hai đường cao AE và BK của tam giác ABC cắt nhau tại H (với E thuộc BC, K thuộc AC).

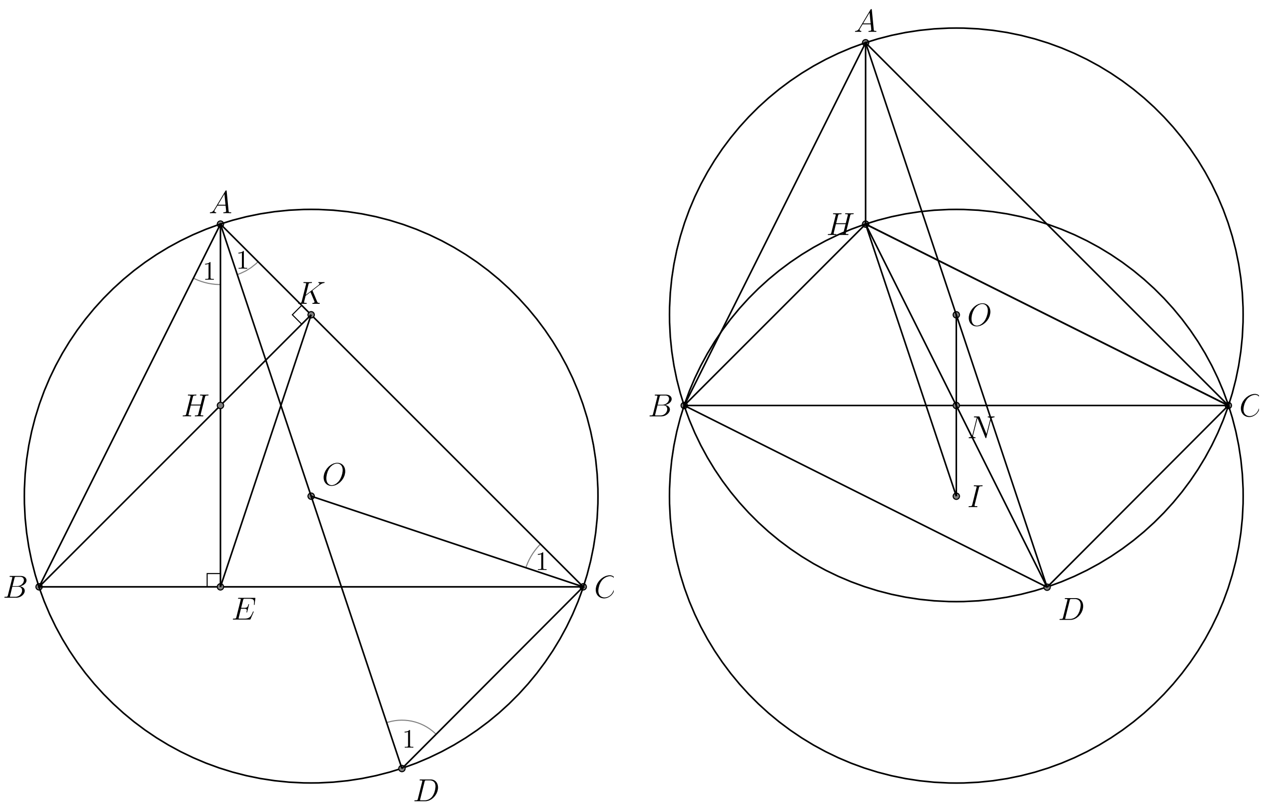
❶ Chứng minh tứ giác $ABEK$ nội tiếp được trong một đường tròn.

❷ Chứng minh $CE.CB = CK.CA$.

❸ Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{BAE}$.

❹ Cho B, C cố định và A di động trên (C) nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện tam giác ABC nhọn, khi đó H thuộc một đường tròn (T) cố định. Xác định tâm I và tính bán kính r của đường tròn (T), biết $R = 3$ cm.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Tứ giác $ABEK$ có: $\begin{cases} \widehat{AEB} = 90^\circ \ (AE \perp BC) \\ \widehat{AKB} = 90^\circ \ (BK \perp AC) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABEK$ nội tiếp một đường tròn.

❷ ΔCEA và ΔCKB có:

$\begin{cases} \widehat{ACB} \text{ chung} \\ \widehat{CEA} = \widehat{CKB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta CEA \backsim \Delta CKB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CE}{CK} = \dfrac{CA}{CB} \Rightarrow CE.CB = CK.CA$

❸ Vẽ đường kính AD của (O).

Tam giác ABE vuông tại E nên $\widehat{A_1} + \widehat{ABC} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{D_1}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC của (O)) $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ$

ΔACD có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{D_1} = 90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$ (ΔOAC cân tại O) $\Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ$

Từ đó suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$

❹ Gọi I là điểm đối xứng với O qua BC, OI cắt BC tại N

$\Rightarrow N$ là trung điểm của OI, BC và các điểm I, N cố định.

Ta có $BH \parallel CD$ (cùng $\perp AC$)

Tương tự: $CH \parallel BD$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành

$\Rightarrow N$ là trung điểm của BC thì N cũng là trung điểm của HD.

ΔAHD có ON là đường trung bình$\Rightarrow AH = 2ON \Rightarrow AH = OI\,(= 2ON)$

Lại có: $AH \parallel OI$ (cùng $\perp BC$) $\Rightarrow$ Tứ giác $AHIO$ là hình bình hành

$\Rightarrow IH = OA = R = 3$ (cm) $\Rightarrow H$ thuộc đường tròn $(I; 3\text{ cm})$ cố định

□

BÀI 12. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và đường cao AK. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm; M và B nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AO). Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng MN và AK. Chứng minh rằng:

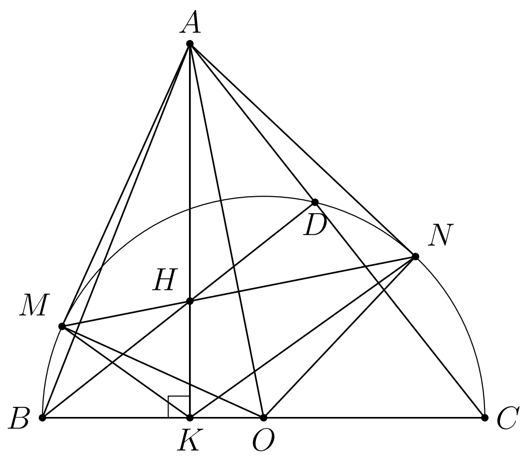
❶ Tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.

❷ KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.

❸ $AN^2 = AK \cdot AH$.

❹ H là trực tâm của tam giác ABC.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Chứng minh tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.

AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$.

AK là đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{AKO} = \widehat{AKC} = 90^\circ$.

Ba điểm điểm M, K, N cùng nhìn đoạn AO dưới một góc vuông nên năm điểm điểm M, K, N, A, O thuộc đường tròn đường kính AO.

Vậy tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.

❷ Chứng minh KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.

AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $AM = AN$. (1)

Theo chứng minh ở câu a), năm điểm M, K, N, O, A cùng thuộc một đường tròn nên ta có tứ giác $AMKN$ nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AKM} = \widehat{AKN}$ (các góc nội tiếp cùng chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau). Vậy KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.

❸ Chứng minh $AN^2 = AH.AK$

$$\begin{cases} \widehat{ANH} = \widehat{AKM} & \text{(tứ giác } AMKN \text{ nội tiếp)} \\ \widehat{AKM} = \widehat{AKN} & \text{(chứng minh ý b)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{ANH}.$$

ΔAHN và ΔANK có $\widehat{AKN} = \widehat{ANH}$, $\widehat{HAN} = \widehat{KAN}$ nên $\Delta AHN \backsim \Delta ANK$ (g.g). Suy ra $\dfrac{AN}{AK} = \dfrac{AH}{AN}$, hay $AN^2 = AH.AK$. (3)

❹ Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi D là giao điểm của AC và đường tròn (O).

ΔAND và ΔACN có $\widehat{NAD} = \widehat{NAC}$, $\widehat{AND} = \widehat{ACN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau) nên $\Delta AND \backsim \Delta ACN$ (g.g). Suy ra $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AD}{AN}$, hay $AN^2 = AD.AC$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AH.AK = AD.AC$, hay $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AD}{AK}$.

ΔAHD và ΔACK có $\begin{cases} \widehat{HAD} = \widehat{KAC} \\ \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AD}{AK} \end{cases}$ nên $\Delta AHD \backsim \Delta ACK$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{AKC} = 90^\circ$. Dẫn đến $\widehat{HDC} = 90^\circ$. (5)

Điểm D thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BDC} = 90^\circ$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra B, H, D thẳng hàng. Nghĩa là $BH \perp AC$. Lại có $AH \perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC.

□

BÀI 13. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Lấy điểm C trên cung nhỏ AB (C không trùng với A, B). Từ điểm C kẻ CD vuông góc với AB, CE vuông góc với MA, CF vuông góc với MB ($D \in AB, E \in MA, F \in MB$). Gọi I là giao điểm của AC và DE, K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng

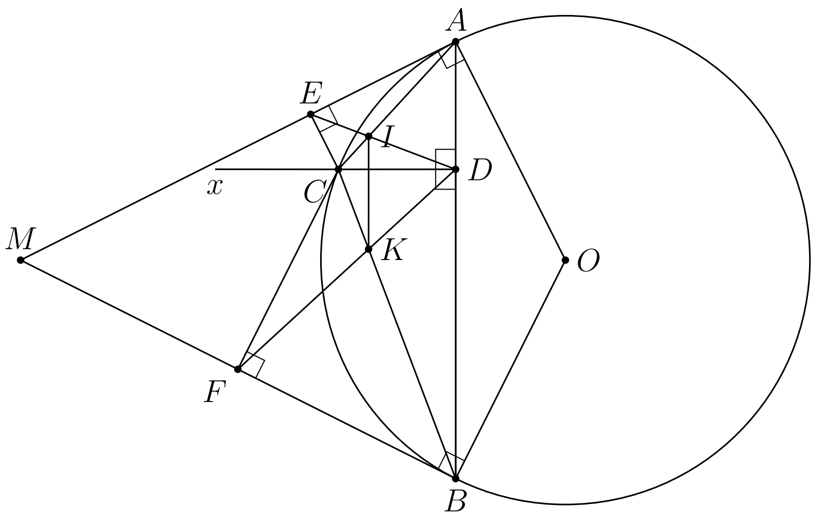
❶ Tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn.

❷ Hai tam giác CDE và CFD đồng dạng.

❸ Tia đối của tia CD là tia phân giác của góc $\widehat{ECF}$

❹ Đường thẳng IK song song với đường thẳng AB.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Tứ giác $ADCE$ có $\widehat{ADC} = \widehat{AEC} = 90^\circ$ nên $ADCE$ là tứ giác nội tiếp.

❷ Tứ giác $ADCE$ nội tiếp nên $\widehat{EAC} = \widehat{EDC}$.
Tương tự, tứ giác $BDCF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{CFD} = \widehat{CBD}$.
Mặt khác, theo tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung thì $\widehat{EAC} = \widehat{CBD}$.
Do đó $\widehat{EDC} = \widehat{CFD}$.
Chứng minh tương tự thì $\widehat{CED} = \widehat{CDF}$.
Vậy hai tam giác $\triangle CDE$ và $\triangle CFD$ đồng dạng với nhau.

❸ Gọi Cx là tia đối của tia CD. Tam giác $\triangle CDE$ đồng dạng với $\triangle CFD$ suy ra $\widehat{DCE} = \widehat{DCF}$. Do đó $\widehat{ECx} = \widehat{FCx}$. Vậy Cx là tia phân giác của góc $\widehat{ECF}$.

❹ Ta có $\widehat{ICK} + \widehat{IDK} = \widehat{ICK} + \widehat{IDC} + \widehat{KDC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $ICKD$ nội tiếp, do đó $\widehat{CIK} = \widehat{KDC} = \widehat{CBF} = \widehat{CAB}$. Vậy $IK \parallel AB$.

□

BÀI 14. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ và cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

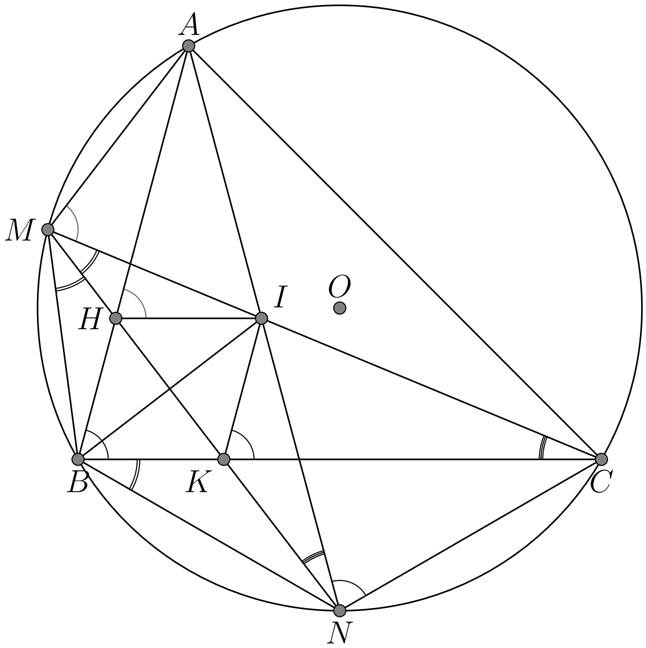
❶ Chứng minh các điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

❷ Chứng minh $NB^2 = NK.MN$.

❸ Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

❹ Gọi PQ lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK , tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn. Ta có M là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow AM = BM \Rightarrow \widehat{MNA} = \widehat{MCB} \Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{ICK}$. Tứ giác $CNKI$ có C và N là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh KI dưới hai góc bằng nhau nên $CNKI$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

Do đó bốn điểm C, N, I, K cùng thuộc một đường tròn.

❷ Chứng minh $NB^2 = NK.MN$.

Ta có N là điểm chính giữa cung $BC \Rightarrow \overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{CN} \Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Mà $\widehat{CBN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CN}$)

$\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{BMN}$ (cùng bằng góc $\widehat{CNN}$) $\Rightarrow \widehat{KBN} = \widehat{BMN}$

Xét $\triangle KBN$ và $\triangle BMN$ có: $\begin{cases} \widehat{N} \text{ chung} \\ \widehat{KBN} = \widehat{BMN} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle KBN \sim \triangle BMN \Rightarrow \dfrac{KN}{BN} = \dfrac{BN}{MN} \Rightarrow NB^2 = NK.NM$(điều phải chứng minh).

❸ Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ANC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

Mà $\widehat{AMC} = \widehat{AHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{IC}$)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IKC}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HB \parallel IK$ (1).

Chứng minh tương tự phần 1 ta có tứ giác $AMHI$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ANC} = \widehat{IKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AI}$)

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AHI}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $BK \parallel HI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHIK$ là hình bình hành.

Mặt khác AN, CM lần lượt là các tia phân giác của các góc A và C trong tam giác ABC nên I là giao điểm ba đường ph56.90463an giác, do đó BI là tia phân giác của góc B.

Vậy tứ giác $BHIK$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

❹ Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{NC}$ nên DN là trung trực của $BC \Rightarrow DN$ là phân giác $\widehat{BDC}$.

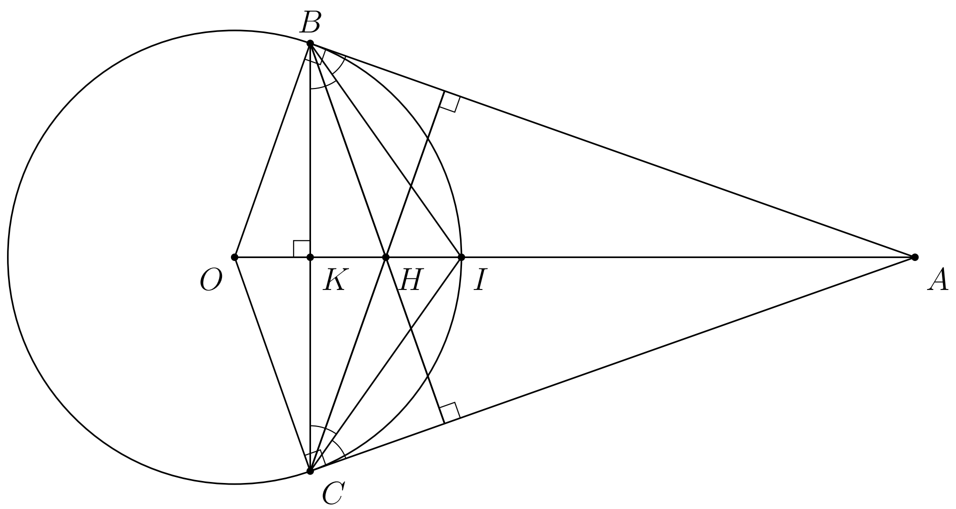
Ta có $\widehat{KQC} = 2\widehat{KMC}$ (góc nội tiếp bằng nữa góc ở tâm của đường tròn (Q))
Lại có $\widehat{NDC} = \widehat{KMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BC}$)
Mà $\widehat{BDC} = 2\widehat{NDC} \Rightarrow \widehat{KQC} = \widehat{BDC}$
Xét tam giác $\triangle BDC$ và $\triangle KQC$ là các tam giác cân tại D và Q có hai góc $\widehat{BCD} = \widehat{BCQ}$ do vậy D, Q, C thẳng hàng nên $KQ \parallel PK$
Chứng minh tương tự ta có ta có D, P, B thẳng hàng và $DQ \parallel PK$
Do đó tứ giác $PDQK$ là hình bình hành nên E là trung điểm của PQ cũng là trung điểm của DK . Vậy D, E, K thẳng hàng (điều phải chứng minh).

□

BÀI 15. Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.
3. Gọi I là giao điểm của đoạn OA với đường tròn (O). Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
4. Cho $OB = 3$ cm, $OA = 5$ cm. Tính diện tích tam giác ABC.

✍ **LỜI GIẢI.**



1. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) (tại B, C) nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90°$
$\Rightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO.
2. Vì $\begin{cases} OB \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OB \parallel CH$ (1). Tương tự $OC \parallel BH$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $BOCH$ là hình bình hành. Mà $OB = OC$ nên $BOCH$ là hình thoi.
3. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$. Vì I là giao điểm của đoạn AO với (O) nên I là điểm chính giữa của cung (nhỏ) $\widehat{BC} \Rightarrow \widehat{IBC} = \dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{BC}$ (3) (tính chất góc nội tiếp).
Vì I là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ và AB là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ABI} = \dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{BC}$ (4).
Từ (3) và (4) ta suy ra BI là tia phân giác $\widehat{ABC}$, do vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

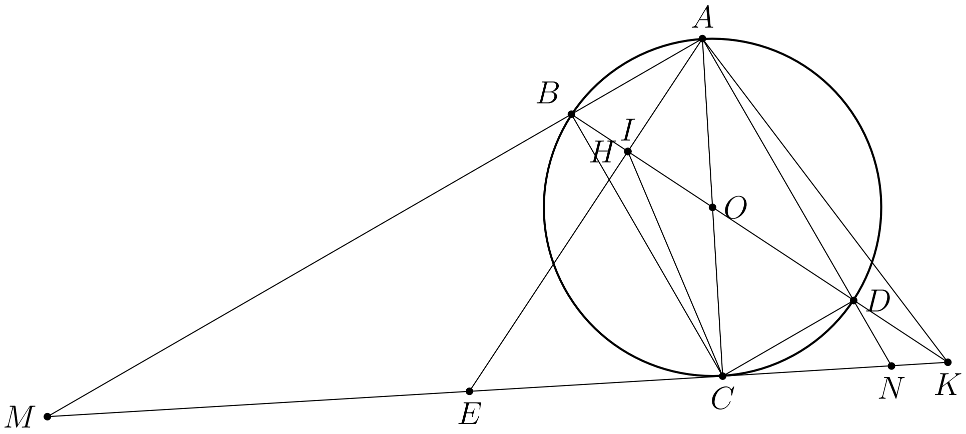
❹ Gọi K là giao điểm của OA và $BC \Rightarrow K$ là trung điểm của BC và $BK \perp AO$.
Áp dụng định lý Pitago cho tam giác AOB vuông tại B: $AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = 4$ cm.
Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác AOB vuông tại B:
$\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{25}{144} \Rightarrow BK = \dfrac{12}{5} \Rightarrow AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \dfrac{16}{5}$ cm.
Diện tích tam giác ABC là $S(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot AK \cdot BC = \dfrac{192}{25}$ cm^2.

□

BÀI 16. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại điểm C cắt các đường thẳng AB và AD theo thứ tự tại M, N. Dựng AH vuông góc với BD tại điểm H; K là giao điểm của hai đường thẳng MN và BD.

❶ Chứng minh tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
❷ Chứng minh rằng: $AD \cdot AN = AB \cdot AM$.
❸ Gọi E là trung điểm của MN. Chứng minh ba điểm A, H, E thẳng hàng.
❹ Cho $AB = 6$ cm và $AD = 8$ cm. Tính độ dài đoạn MN.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét tứ giác $AHCK$ ta có $\widehat{AHK} = 90°$,
CK là tiếp tuyến của đường tròn O và AC là đường kính nên $AC \perp CK \Rightarrow \widehat{ACK} = 90°$.
Vậy H và C cùng nhìn AK dưới một góc vuông nên tứ giác $AHCK$ nội tiếp một đường tròn.

❷ Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$,
đồng thời $\widehat{AMN} = \widehat{ACD}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AMN}$.
Xét hai tam giác ΔAMN và ΔADB có $\widehat{DAB} = \widehat{MAN} = 90°$ và $\widehat{ADB} = \widehat{AMN}$,
Nên hai tam giác ΔAMN và ΔADB đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AN}{AB} \Leftrightarrow AD \cdot AN = AB \cdot AM$.

❸ Giả sử AE cắt BD tại I, ta chứng minh H trùng với I. Thật vậy
Ta có ΔAMN vuông tại A có E là trung điểm của cạnh $MN \Rightarrow \Delta AEN$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{ENA}$.
Theo chứng minh trên ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AMN}$.
Do đó $\widehat{EAN} + \widehat{ADB} = \widehat{AMN} + \widehat{ENA} = 90°$ hay $\widehat{AID} = 90°$.
Suy ra $AI \perp BD$ tại I, do đó H và I trùng nhau hay A, H, E thẳng hàng.

❹ Đặt $AN = x > 0$ và $AM = y > 0$, ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$.
Ta có $\begin{cases} AD \cdot AN = AB \cdot AM \\ \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AC^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{2} \\ y = \dfrac{50}{3} \end{cases}.$

Mặt khác $AM \cdot AN = AC \cdot MN \Rightarrow MN = \dfrac{125}{6}(cm)$.

□

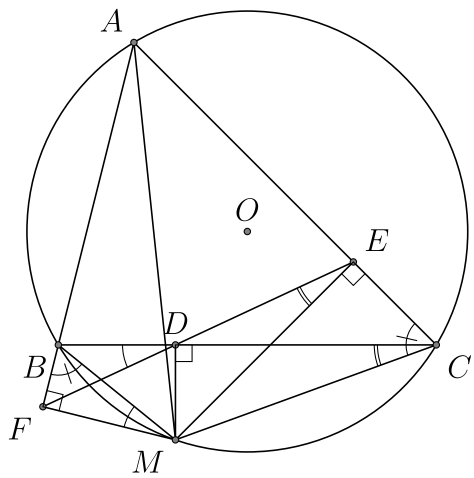
BÀI 17. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm (O), M là một điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm M, D, B, F thuộc một đường tròn và bốn điểm M, D, E, C thuộc một đường tròn;

b) Ba điểm D, E, F thẳng hàng;

c) $\dfrac{BC}{MD} = \dfrac{CA}{ME} + \dfrac{AB}{MF}$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có: D và F lần lượt là hình chiếu của M lên BC và AB.

$\Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{BFM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow DMFB$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow M, D, B, F$ thuộc một đường tròn.

Ta có: D và E lần lượt là hình chiếu của M lên BC và AC.

$\Rightarrow \widehat{MDC} = 90^\circ = \widehat{MEC}$

$\Rightarrow MDEC$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow M, D, E, C$ thuộc một đường tròn.

b) Ta có: $\widehat{FMB} = \widehat{FDB}$ (do $MDBF$ nội tiếp). (i)

$\widehat{CME} = \widehat{CDE}$ (do $DECM$ nội tiếp). (ii)

Mặt khác, tứ giác $ACMB$ nội tiếp (O) nên $\widehat{FBM} = \widehat{ACM}$. (1)

Xét hai tam giác vuông FBM và ECM, ta có: $\begin{cases} \widehat{FBM} + \widehat{FMB} = 90^\circ \\ \widehat{CME} + \widehat{ECM} = 90^\circ \end{cases}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FMB} = \widehat{CME}$. (iii)

Từ (i), (ii) và (iii) suy ra $\widehat{FDB} = \widehat{CDE}$.

$\Rightarrow E, F, D$ thẳng hàng (đpcm).

c) Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{AC}{ME} + \frac{AB}{MF} &= \frac{AE - EC}{ME} + \frac{AF + FB}{MF} \\
&= \frac{AE}{ME} - \frac{EC}{ME} + \frac{AF}{MF} + \frac{FB}{MF} \\
&= \tan \widehat{AME} - \tan \widehat{CME} + \tan \widehat{AMF} + \tan \widehat{FMB} \\
&= \tan \widehat{AME} + \tan \widehat{AMF} \text{ (cmt câu b)} \\
&= \tan \widehat{BMD} + \tan \widehat{MDC} \text{ (do tứ giác } ABMC \text{ nội tiếp)} \\
&= \frac{BD}{MD} + \frac{CD}{MD} \\
&= \frac{BC}{MD} \text{ (đpcm).}
\end{aligned}$$

□

BÀI 18. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), dựng AH vuông góc với BC tại điểm H. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm H trên AB và AC. Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại điểm D. Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính CD. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt nửa đường tròn trên tại điểm E.

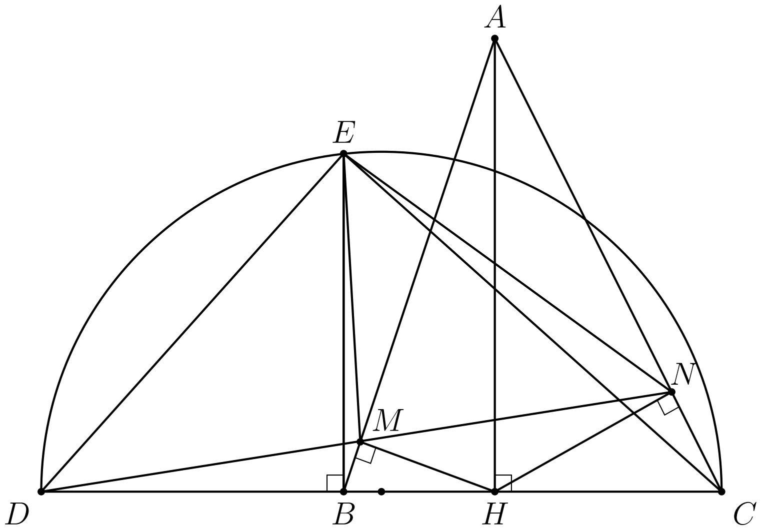
❶ Chứng minh rằng tứ giác $AMHN$ là tứ giác nội tiếp.

❷ Chứng minh $\widehat{EBM} = \widehat{DNH}$.

❸ Chứng minh rằng $DM.DN = DB.DC$.

❹ Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE. Chứng minh rằng $OE \perp DE$.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Xét tứ giác $AMHN$ có

$\widehat{AMH} = 90^\circ$ (gt)

$\widehat{ANH} = 90^\circ$ (gt)

suy ra $\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 180^\circ$.

Mà hai góc ở vị trí đối nhau nên $AMHN$ là tứ giác nội tiếp.

❷ Ta có $\begin{cases} EB \perp DC \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow EB \parallel AH$, suy ra $\widehat{EBA} = \widehat{BAH}$ (1) (so le trong).

Tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên ta có $\widehat{MAH} = \widehat{MNH}$ (2)(hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Từ (1)và (2) suy ra $\widehat{EBM} = \widehat{DNH}$.

❸ Ta có

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{DMB} = \widehat{AMN} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{AMN} = \widehat{AHN} \text{ (do tứ giác } AMHN \text{nội tiếp)} \\ \widehat{AHN} = \widehat{NCH} \text{ (do cùng phụ với góc } \widehat{NHC}) \end{array}\right\} \text{ suy ra } \widehat{DMB} = \widehat{NCH}.$$

Xét tam giác DMB và DCN có $\widehat{DMB} = \widehat{NCD}$ và chung góc $\widehat{NDC}$, suy ra ΔDMB đồng dạng với ΔDCN theo trường hợp góc-góc. Từ đó suy ra $\dfrac{DM}{DC} = \dfrac{DB}{DN} \Rightarrow DM.DN = DB.DC$.

❹ Ta có ΔDEC vuông tại E, EB là đường cao nên $DE^2 = DB.DC$ mặt khác $DM.DN = DB.DC$ suy ra $DE^2 = DM.DN \Rightarrow \dfrac{DM}{DE} = \dfrac{DE}{DN}$.

Từ đó suy ra ΔDEM đồng dạng với ΔDNE do $\dfrac{DM}{DE} = \dfrac{DE}{DN}$ và chung góc $\widehat{NDE}$.

Suy ra $\widehat{DEM} = \widehat{ENM}$ suy ra DE là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE tại E hay $DE \perp OE$.

□

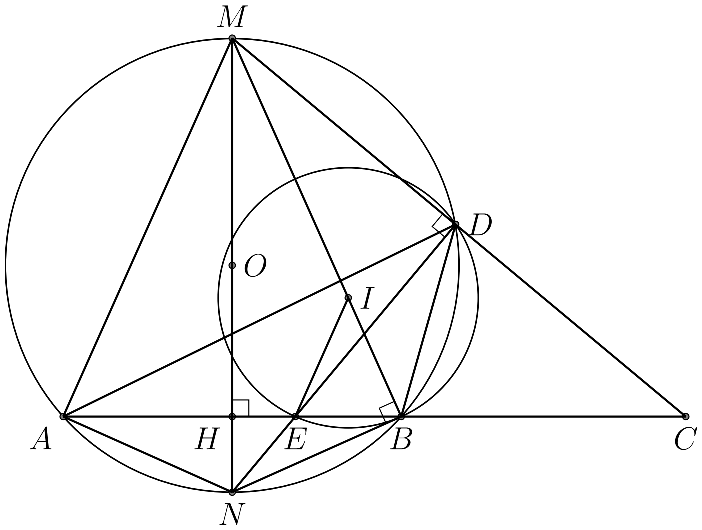
BÀI 19. Tam giác AMB cân tại M nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Kẻ MH vuông góc AB ($H \in AB$), MH cắt đường tròn tại N. Biết $MA = 10$ cm, $AB = 12$ cm.

❶ Tính MH và bán kính R của đường tròn.

❷ Trên tia đối tia BA lấy điểm C. Tia MC cắt đường tròn tại D, ND cắt AB tại E. Chứng minh tứ giác $MDEH$ nội tiếp và chứng minh các hệ thức sau: $NB^2 = NE.ND$ và $AC.BE = BC.AE$.

❸ Chứng minh NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Theo tính chất đường kính và dây cung suy ra H là trung điểm AB và $AH = 6$ cm.
ΔAMH vuông tại $H \Rightarrow MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm.
ΔAMN vuông tại A, đường cao AH, do đó$AH^2 = HM.HN \Rightarrow HN = \dfrac{AH^2}{MH} = \dfrac{36}{8} = 4,5$ cm.
Bán kính $R = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{MH + HN}{2} = \dfrac{8 + 4,5}{2} = 6,25$ cm.

❷ $\widehat{MDN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{MHE} = 90^\circ$ ($MH \perp AB$). Từ đó suy ra $\widehat{MDE} + \widehat{MHE} = 180^\circ$, do đó tứ giác $MDEH$ nội tiếp.
Xét các tam giác ΔNBE và ΔNDB có góc N chung, $\widehat{NBE} = \widehat{NDB}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau là cung NA, NB).
Suy ra $\Delta NBE \backsim \Delta NDB$, do đó $\dfrac{NB}{ND} = \dfrac{NE}{NB} \Rightarrow NB^2 = NE.ND$.
Ta có cung NA bằng cung NB (tính chất đường kính và dây cung), suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{EDB} \Rightarrow DE$ là phân giác trong của ΔABD.
Vì $ED \perp DC \Rightarrow DC$ là phân giác ngoài của ΔABD.
Từ đó suy ra: $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{CA}{CB} \Rightarrow AC.BE = BC.AE$.

❸ Kẻ $EI \| AM$ ($I \in BM$) $\Rightarrow \Delta AMB \backsim \Delta EIB \Rightarrow \Delta EIB$ cân tại $I \Rightarrow IE = IB$.
Gọi (O') là đường tròn tâm I ngoại tiếp $\Delta EBD'$. Ta có $NB \perp BM$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O), từ đó suy ra $BN \perp BI \Rightarrow BN$ là tiếp tuyến đường tròn $(O') \Rightarrow \widehat{EBN} = \widehat{ED'B}$ (cùng chắn cung BE).
Mặt khác trên đường tròn (O), $\widehat{EBN} = \widehat{EDB}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau NA, NB) $\Rightarrow D$

nằm trên đường tròn (O').

Vậy NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

□

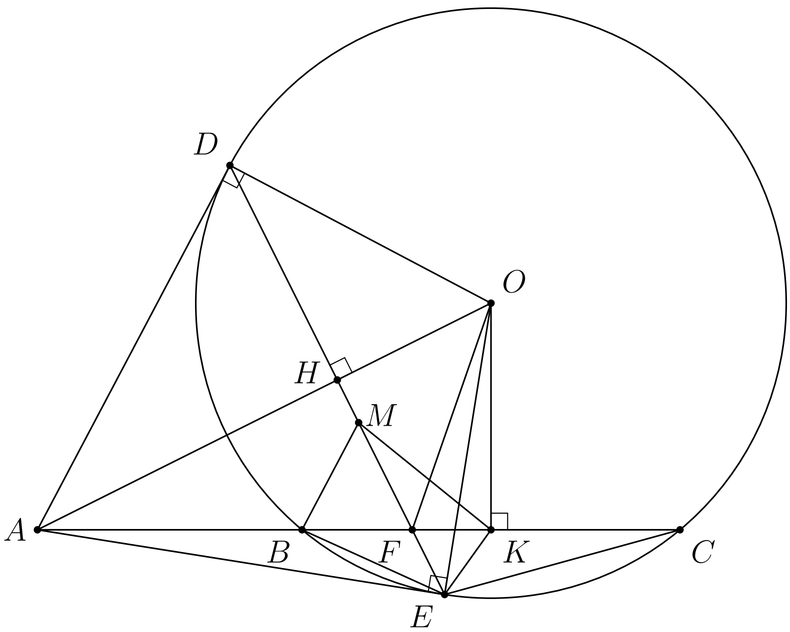
BÀI 20. Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Gọi (O) là một đường tròn thay đổi luôn đi qua B và C (tâm O không thuộc đường thẳng BC). Từ A kẻ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn (O) (D, E là các tiếp điểm và D, O nằm cùng trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC). Gọi K, H lần lượt là trung điểm của BC và DE.

❶ Chứng minh $AE^2 = AB \cdot AC$.

❷ Trên DE lấy điểm M sao cho BM song song với AD. Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp đường tròn và MK song song với DC.

❸ Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK thuộc một đường thẳng cố định.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có $\triangle ABE \backsim \triangle AEC$ (g.g), suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AE}{AC}$. Vậy $AE^2 = AB \cdot AC$.

❷ Dễ thấy, năm điểm O, A, D, E, K nằm trên đường tròn đường kính OA. Suy ra $\widehat{DEK} = \widehat{DAK}$, mà $\widehat{DAK} = \widehat{MBK}$ (do $AD \parallel BM$), nên $\widehat{MBK} = \widehat{MEK}$. Vậy tứ giác $BMKE$ là tứ giác nội tiếp.

❸ Gọi F là giao điểm của DE và AC. Khi đó tứ giác $OHFK$ nội tiếp đường tròn đường kính OF. Suy ra

$$AF \cdot AK = AH \cdot AO = AE^2 = AB \cdot AC,$$

hay $AF = \dfrac{AB \cdot AC}{AK}$, do đó F là điểm cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK (cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OHFK$) chạy trên đường trung trực của đoạn thẳng FK.

□

CHƯƠNG 4 HÌNH CẦU, HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN

BÀI 1 HÌNH TRỤ. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH HÌNH TRỤ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

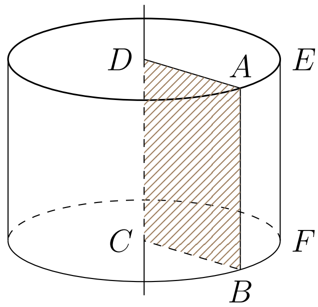
1 Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng quay cạnh CD cố định, ta được một hình trụ (h.73). Khi đó:

- Hai đáy là hai hình tròn (C) và (D) bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song.

- Đường thẳng CD là trục của hình trụ.

- AB là một đường sinh. Đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài đường sinh là chiều cao hình trụ.



Hình 73

2 Diện tích xung quanh của hình trụ

$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh.$

$S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2.$

3 Thể tích hình trụ

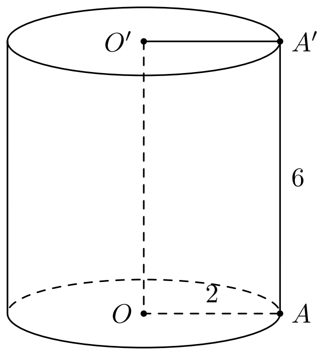
$V = Sh = \pi R^2 h$ (R là bán kính đáy, h là chiều cao, S là diện tích đáy).

B CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 2 cm, chiều cao là 6 cm. Hãy tính:

1. Diện tích xung quanh của hình trụ.
2. Diện tích toàn phần của hình trụ.
3. Thể tích hình trụ.

LỜI GIẢI.



❶ Diện tích xung quanh của hình trụ là
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2\cdot\pi\cdot 2\cdot 6 = 24\pi \approx 24\cdot 3,14 = 75,36$ (cm^2)

❷ Diện tích toán phần của hình trụ là

$$\begin{aligned} S_{\text{tp}} &= 2\pi Rh + 2\pi R^2 \\ &= 2\cdot\pi\cdot 2\cdot 6 + 2\cdot\pi\cdot 2^2 \\ &= 24\pi + 8\pi = 32\pi \approx 32\cdot 3,14 = 100,48\ (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

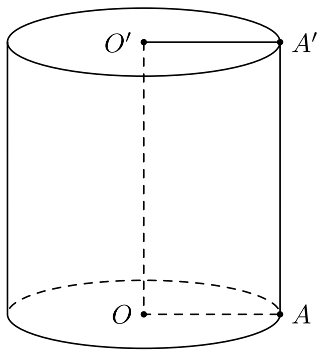
❸ Thể tích hình trụ là:
$V = \pi R^2 h = \pi\cdot 2^2\cdot 6 = 24\pi \approx 24\cdot 3.14 = 75,36$ (cm^3)

□

VÍ DỤ 2. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 20π cm^2 và diện tích toàn phần là 28π cm^2 . Tính thể tích của hình trụ đó.

✍ LỜI GIẢI.

Ta có $S_{\text{đ}} = \dfrac{S_{\text{tp}} - S_{\text{xq}}}{2} = \dfrac{28\pi - 20\pi}{2} = 4\pi$ (cm^2).
Mà $S_{\text{đ}} = \pi R^2 \Leftrightarrow \pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 2$ (cm).
Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh \Rightarrow h = \dfrac{20\pi}{2\pi R} = \dfrac{10}{2} = 5$ (cm).
Thể tích của hình trụ đó là
$V = \pi R^2 h = \pi\cdot 2^2\cdot 5 = 20\pi \approx 62,8$ (cm^3).

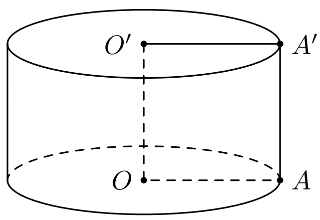


□

VÍ DỤ 3. Một hình trụ có chiều cao bằng 5 cm. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính thể tích hình trụ.

✍ LỜI GIẢI.

Vì diện tích toàn phần bằng hai lần diện tích xung quanh nên
$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi Rh \Leftrightarrow 2\pi R^2 = 2\pi Rh \Leftrightarrow R = h.$
Vậy bán kính đáy là 5 cm.
Thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi\cdot 5^2\cdot 5 = 125\pi$ (cm^3).

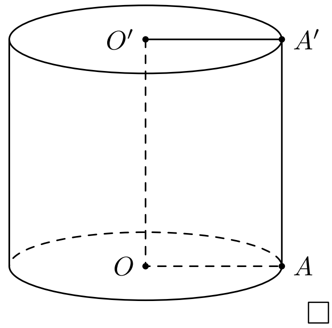


□

VÍ DỤ 4. Một thùng phuy hình trụ có số đo diện tích xung quanh (tính bằng mét vuông) đúng bằng số đo thể tích (tính bằng mét khối). Tính bán kính đáy của hình trụ.

✍ LỜI GIẢI.

Gọi bán kính đáy và chiều cao hình trụ lần lượt là R và h.
Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$ (m^2); $V = \pi R^2 h$ (m^3).
Theo đề bài hai số đo trên bằng nhau nên ta có $2\pi Rh = \pi R^2 h$
suy ra $R = 2$ (m).

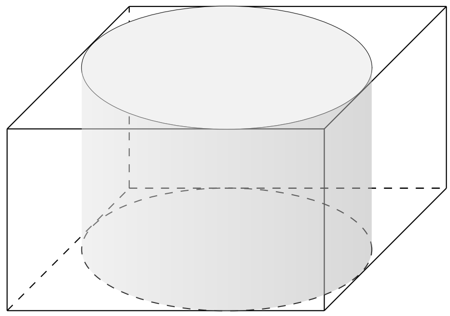


□

VÍ DỤ 5. Một lọ hình trụ được "đặt khít" trong một hộp giấy hình hộp chữ nhật. Biết thể tích của lọ hình trụ là 270 cm^3, tính thể tích của hộp giấy.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi bán kính và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Khi đó hình hộp chữ nhật có cạnh đáy là $2R$ và chiều cao là h.
Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của hình trụ và hình hộp.
Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi R^2 h}{4R^2 h}$. Do đó $\dfrac{270}{V_2} = \dfrac{\pi}{4}$.
Suy ra $V_2 = \dfrac{270 \cdot 4}{\pi} \approx 344$ (cm^3).
Vậy thể tích hình hộp là 344 (cm^3).



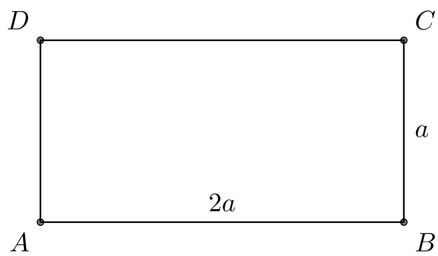
□

VÍ DỤ 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a, BC = a$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có thể tích V_1 và khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có thể tích V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

✍ **LỜI GIẢI.**

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có chiều cao $h = AB = 2a$, bán kính đáy $R = BC = a$ nên có thể tích

$$V_1 = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3 (\text{đvtt})$$



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có chiều cao $h' = BC = a$, bán kính đáy $R' = CD = 2a$ nên có thể tích

$$V_2 = \pi R'^2 h' = \pi (2a)^2 \cdot a = 4\pi a^3 (\text{đvtt})$$

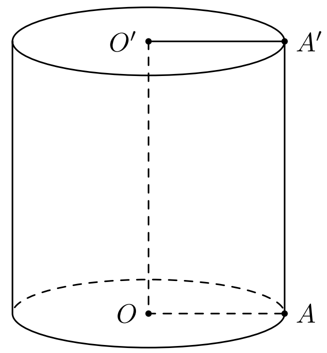
. Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2\pi a^3}{4\pi a^3} = \dfrac{1}{2}$.

□

VÍ DỤ 7. Một hộp sữa hình trụ có chiều cao hơn đường kính là 3 cm. Biết diện tích vỏ hộp (kể cả nắp) là $292,5\pi \text{cm}^2$. Tính thể tích của hộp sữa đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi R là bán kính đáy của hộp sữa, h là chiều cao của nó.
Ta có $h = 2R + 3$.
Vì diện tích toàn phần của hộp sữa là $292,5\pi\text{cm}^2$ nên



$$\begin{aligned} & 2\pi R(h+R) = 292,5\pi \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi R(h+R) = 292,5\pi \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi R(2R+3+R) = 292,5\pi \\ \Leftrightarrow\ & R(R+1) = 48,75 \\ \Leftrightarrow\ & R^2 + R - 48,75 = 0 \end{aligned}$$

Giải ra được $R_1 = 6,5$ (chọn); $R_2 = -7,5$ (loại). Vậy bán kính đáy hộp sữa là $6,5$ cm.
Chiều cao hộp sữa là 16 cm. Thể tích hộp sữa là
$V = \pi R^2 h = \pi \cdot (6,5)^2 \cdot 16 = 676\pi\ (\text{cm}^3)$

□

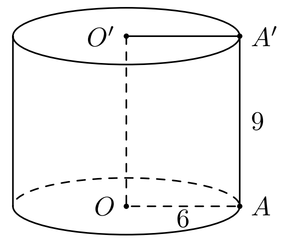
C LUYỆN TẬP

BÀI 1. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 6 cm, chiều cao là 9 cm. Hãy tính

❶ Diện tích xung quanh của hình trụ.
❷ Thể tích của hình trụ.

✍ LỜI GIẢI.

❶ Diện tích xung quanh của hình trụ là $2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 9 = 108\pi\ (\text{cm}^2)$.
❷ Thể tích của hình trụ là $\pi \cdot 6^2 \cdot 9 = 324\pi\ (\text{cm}^3)$.

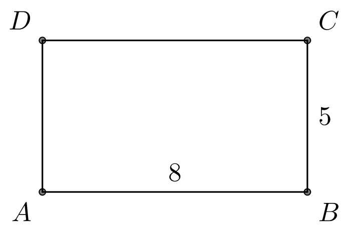


□

BÀI 2. Một hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 8 cm, 5 cm. Quay hình chữ nhật đó một vòng quanh chiều dài hay chiều rộng thì thể tích lớn hơn.

✍ LỜI GIẢI.

Khi quay quanh chiều dài thì $R = 5$, $h = 8$ (cm).
$V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 200\pi\ (\text{cm}^3)$.
Khi quay quanh chiều rộng thì $R = 8$, $h = 5$ (cm).
$V_2 = \pi \cdot 8^2 \cdot 5 = 320\pi\ (\text{cm}^3)$.
Vì $V_2 > V_1$ nên khi quay quanh chiều rộng thì thể tích sẽ lớn hơn khi quay quanh chiều dài.



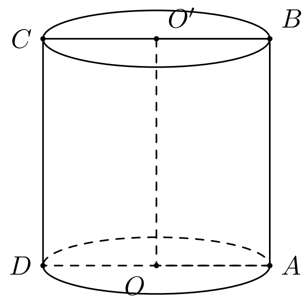
□

BÀI 3. Người ta cắt hình trụ bằng một mặt phẳng chứa trục. Biết thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 36 cm^2. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

✍ LỜI GIẢI.

Độ dài mỗi cạnh của thiết diện là $a = \sqrt{35} = 6$ (cm).
Vậy chiều cao của hình trụ là $h = 6$ (cm),
bằng đường kính của đáy hình trụ. Ta có $2R = 6$ do đó $R = 3$ (cm).

— Diện tích xung quanh của hình trụ là
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 \approx 113,4$ (cm^2).
— Thể tích của hình trụ là
$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 \approx 169,56$ (cm^3).

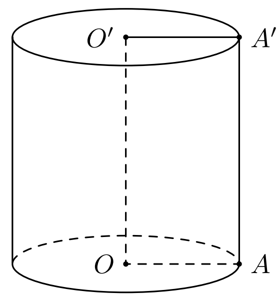


□

BÀI 4. Một hình trụ có chu vi đáy là 24π cm và diện tích toàn phần là 768πcm^2. Tính thể tích của hình trụ.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có $C = 2\pi R$, suy ra
$R = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{24\pi}{2\pi} = 12$ (cm). Vì dện tích toàn phần của hình trụ là 768π cm^2
nên $2\pi R(h + R) = 768\pi$, hay $2\pi \cdot 12(h + 12) = 768\pi \Rightarrow h + 12 = 32$
$\Rightarrow h = 20$ (cm).
Vậy thể tích của hình trụ là
$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 12^2 \cdot 20 = 2880\pi$ (cm^3).

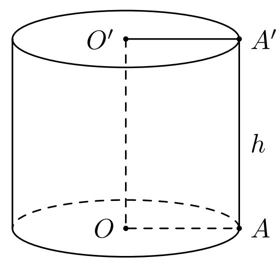


□

BÀI 5. Tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của một hình trụ là $\dfrac{3}{5}$. Biết bán kính đáy là 6 cm, tính chiều cao của hình trụ.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h. ta có
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6h = 12\pi h$.
$S_{\text{tp}} = 2\pi R(h + R) = 2\pi \cdot 6(h + 6)$. Theo đề bài ta có $\dfrac{S_{\text{xq}}}{S_{\text{xq}}} = \dfrac{3}{5}$.
Suy ra $\dfrac{12\pi h}{12\pi(h + 6)} = \dfrac{3}{5}$. Giải ra ta được $h = 9$ (cm).

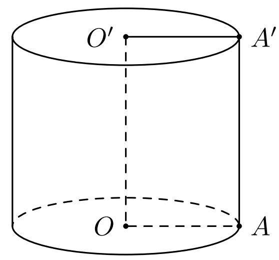


□

BÀI 6. Một hình trụ có thể tích là 300 cm^3 và diện tích xung quanh là 120 cm^2. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

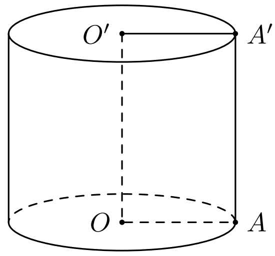
Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Ta có $V = \pi R^2 h = 300$ (cm^3).
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 120$ (cm^2).
Do đó $\dfrac{\pi R^2 h}{2\pi Rh} = \dfrac{300}{120} \Rightarrow R = 5$ (cm).
$S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 120 + 157 = 277$ (cm^2).



□

BÀI 7. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 24π cm^2 và diện tích toàn phần là 42π cm^2. Tính thể tích của hình trụ đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

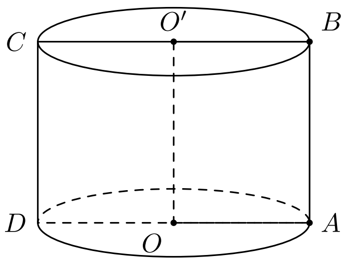


Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Ta có
$S_{\text{đ}} = \dfrac{S_{\text{tp}} - S_{\text{xq}}}{2} = \dfrac{42\pi - 24\pi}{2} = 9\pi$ (cm^2).
$S_{\text{đ}} = 9\pi \Leftrightarrow \pi R^2 = 9\pi \Leftrightarrow R = 3$ (cm).
Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh \Rightarrow h = \dfrac{S_{\text{xq}}}{2\pi R} = 4$ (cm).
Do đó thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi$ (cm^3).

□

BÀI 8. Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao, thiết diện đi qua trục có diện tích bằng 72 cm^2. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.

✍ **LỜI GIẢI.**



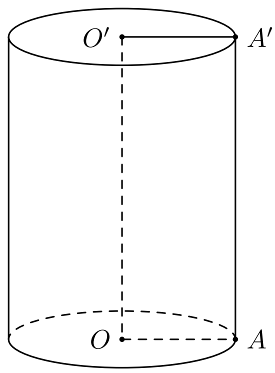
Gọi bán kính đáy là R, chiều cao là h.
Theo đề bài ta có $R = h$ và $2Rh = 72 \Leftrightarrow R^2 = 36 \Leftrightarrow R_1 = 6$ (thỏa mãn), $R_2 = -6$ (loại). Do đó $R = h = 6$ cm.

— Diện tích xung quanh bằng
$2\pi Rh = 2\pi \cdot Rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 6 = 72\pi$ (cm^2).
— Diện tích toàn phần bằng
$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 6 \cdot 6 + 2\pi \cdot 6^2 = 144\pi$ (cm^2).
— Thể tích của hình trụ bằng $\pi R^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 216\pi$ (cm^3).

□

BÀI 9. Một hình trụ có chiều cao là 18 cm và diện tích toàn phần là 176 cm^2. Chứng minh rằng diện tích xung quanh hình trụ bằng 9 lần diện tích đáy.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Vì diện tích toàn phần bằng 176π cm^2 nên ta có

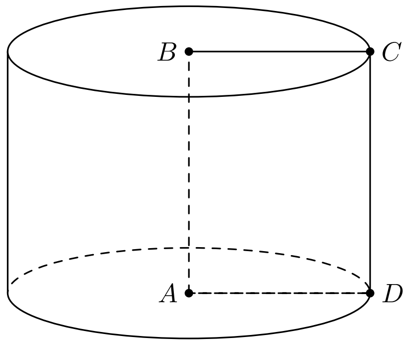
$$\begin{aligned} & 2\pi R(h+R) = 176\pi \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi R(18+R) = 176\pi \\ \Leftrightarrow\ & R^2 + 18R - 88 = 0 \end{aligned}$$

Giải ra được $R_1 = 4$ (chọn); $R_2 = -22$ (loại).
Vậy diện tích đáy hình trụ là $S_{\text{đ}} = \pi R^2 = 16\pi$ (cm^2).
Diện tích xung quanh hình tru là
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 18 = 144\pi$ (cm^2). Do đó $\dfrac{S_{\text{xq}}}{S_{\text{đ}}} = \dfrac{144\pi}{16\pi} = 9$ (lần).

□

BÀI 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB > BC$. Biết diện tích hình chữ nhật là 48 cm^2, chu vi là 28 cm. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính dện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ này.

✍ **LỜI GIẢI.**



Từ đề bài ta có $\begin{cases} AB + BC = 14 \\ AB \cdot BC = 48. \end{cases}$

Suy ra AB, BC là nghiệm của phương trình: $x^2 - 14x + 48 = 0$.

Giải phương trình ta được $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.

Do $AB > BC$ nên $AB = 8$; $BC = 6$.

❶ Diện tích xung quanh của hình trụ là
$S_{\text{xq}} = 2 \cdot \pi \cdot BC \cdot AB = 2\pi \cdot 6 \cdot 8 = 96\pi$ (cm^2).

❷ Diện tích toàn phần của hình trụ là
$S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đ}} = 96\pi + 2\pi R^2 = 96\pi + 2\pi \cdot 6^2 = 168\pi$ (cm^2).

❸ Thể tích của hình trụ là
$V = \pi \cdot BC^2 \cdot AB = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 288\pi$ (cm^3).

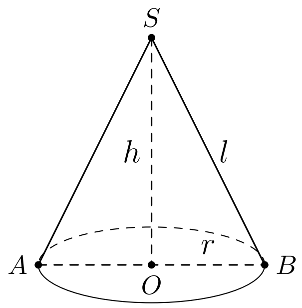
□

BÀI 2 HÌNH NÓN - HÌNH NÓN CỤT - DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

— Mô tả hình nón

+) Đáy của hình nón là hình tròn (O);
+) SA là một đường sinh;
+) S là đỉnh, SO là đường cao.



— Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

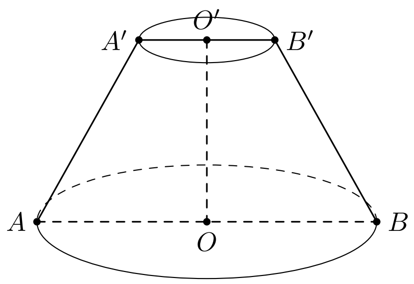
$$\begin{aligned} S_{\text{xq}} &= \pi r l \\ S_{\text{tp}} &= \pi r l + \pi r^2 \end{aligned}$$

(r, l lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón).

— Thể tích hình nón

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ (h là chiều cao).}$$

— Hình nón cụt
Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng bị giới hạn bởi hình nón là một hình tròn. Phần hình tròn nằm giữa mặt phẳng nói trên và đáy là một hình nón cụt.



— Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón cụt

$$\begin{aligned} S_{\text{xq}} &= \pi(R+r)l \\ S_{\text{tp}} &= \pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2 \end{aligned}$$

R, r lần lượt là bán kính hai đáy, l là độ dài đường sinh của hình nón cụt).

— Thể tích hình nón cụt:

$$V = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr)$$

(h là đường cao của hình nón cụt).

⚠ *Hình khai triển mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt.*

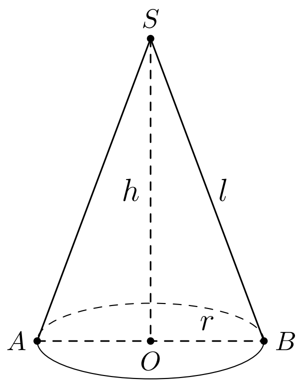
⚠ *Một hình nón được xác định khi biết 2 trong 3 yếu tố: bán kính đáy, chiều cao, đường sinh.*

B CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Một hình nón có bán kính đáy bằng r, diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Tính theo r

1. Diện tích xung quanh của hình nón;
2. Thể tích của hình nón.

LỜI GIẢI.

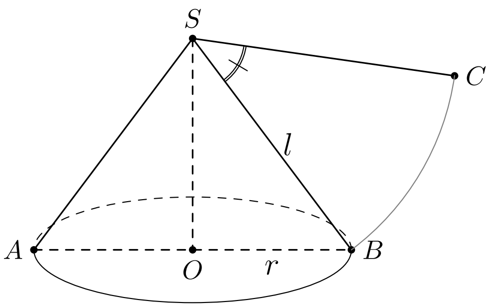


1. Diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy nên $\pi r l = 2\pi r^2$ suy ra $l = 2r$.
   Vậy $\pi r l = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2$. Diện tích xung quanh bằng $2\pi r^2$.
2. Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có $h^2 = l^2 - r^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$ nên $h = r\sqrt{3}$.
   Thể tích hình nón bằng $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \dfrac{\pi r^3\sqrt{3}}{3}$.

□

VÍ DỤ 2. Một hình nón có bán kính đáy bằng r, đường sinh bằng l. Khai triển mặt xung quanh hình nón ta được một hình quạt. Tính số đo cung của hình quạt theo r và l.

LỜI GIẢI.



Khi cắtmặt xung quanh của một hình nón theo một đường sinh và trải phẳng ra thành một hình quạt. Khi đó bán kính hình quạt tròn SBC bằng độ dài đường sinh $SB = l$ và độ dài $\overset{\frown}{BC}$ bằng chu vi đáy. Độ dài $\overset{\frown}{BC}$ của hình quạt bằng chu vi đáy của hình nón bằng $2\pi r$.
Độ dài đường tròn $(S;\ SA)$ bằng $2\pi l$.
Ta có $S_{\text{quạt}} = \dfrac{2\pi \cdot l^2 \cdot n}{360} = l \cdot 2\pi \cdot r \Rightarrow \dfrac{2\pi \cdot l^2 \cdot n}{360} = l \cdot 2\pi \cdot r$
$\Rightarrow \dfrac{l \cdot n}{360} = r$. Do đó, số đo cung AB của hình quạt là

$$n^\circ = 360^\circ \cdot \frac{2\pi r}{2\pi l} = 360^\circ \cdot \frac{r}{l}.$$

□

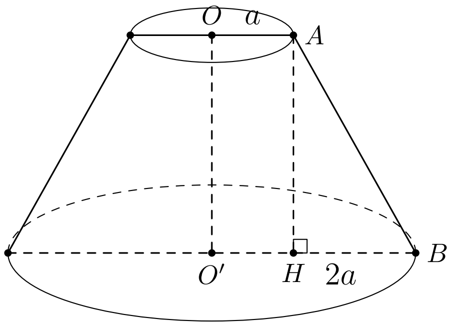
VÍ DỤ 3. Một hình nón cụt có các bán kính đáy bằng a và $2a$, chiều cao bằng a.

1. Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt;
2. Tính thể tích của hình nón cụt.

LỜI GIẢI.

1. Trong mặt phẳng $OABO'$, kẻ $AH \perp O'B$. Ta có $O'H = OA = a$ nên $HB = a$. Tam giác AHB vuông cân nên $AB = HB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.
   Ta có $S_{\text{xq}} = \pi(r_1 + r_2)l = \pi(a + 2a) \cdot a\sqrt{2} = 3\pi a^2\sqrt{2}$.
2. Tính thể tích của hình nón cụt:

$$V = \frac{1}{3}\pi a[a^2 + (2a)^2 + a \cdot 2a] = \frac{7}{3}\pi a^3.$$



□

VÍ DỤ 4. Một hình nón có bán kính đáy bằng 20 cm, số đo thể tích (tính bằng cm^2) bằng bốn lần số đo diện tích xung quanh (tính bằng cm^2). Tính chiều cao của hình nón.

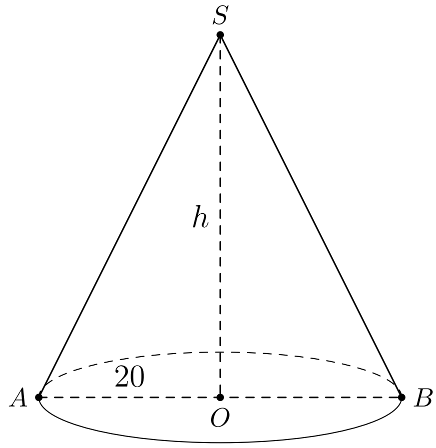
✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi h là chiều cao của hình nón. Thể tích của hình nón bằng

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot h = \frac{400}{3}\pi h.$$

Đường sinh SA bằng $\sqrt{h^2 + 20^2}$.
Diện tích xung quanh của hình nón bằng
$S_{\text{xq}} = \pi \cdot 20\sqrt{h^2 + 400}$.
Do $V = 4S_{\text{xq}}$ nên

$$\begin{aligned} \frac{400}{3}\pi h &= 4 \cdot 20\pi\sqrt{h^2 + 400} \\ &\Leftrightarrow 5h = 3\sqrt{h^2 + 400} \Leftrightarrow 25h^2 = 9(h^2 + 400) \\ &\Leftrightarrow h^2 = 225 \Leftrightarrow h = 15. \end{aligned}$$



Vậy chiều cao của hình nón bằng 15 cm

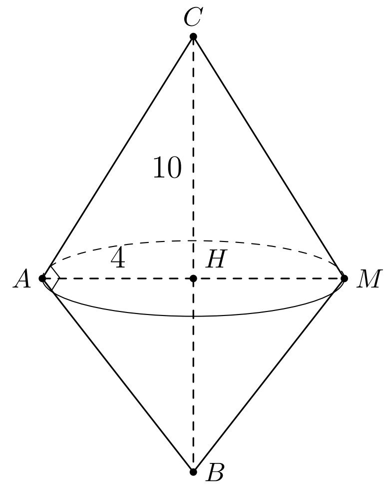
□

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 10$ cm, đường cao $AH = 4$ cm. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC. Tính thể tích hình tạo thành.

✍ **LỜI GIẢI.**

Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC, hình tạo thành gồm hai hình nón có đường cao theo thứ tự là HB và HC.
Thể tích của hình tạo thành bằng

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\pi\cdot AH^2\cdot BH+\frac{1}{3}\pi\cdot AH^2\cdot CH &= \frac{1}{3}\pi\cdot AH^2(BH+CH)\\ &= \frac{1}{3}\pi\cdot AH^2\cdot BC\\ &= \frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 10=\frac{160}{3}\pi(\text{cm}^3).\end{aligned}$$

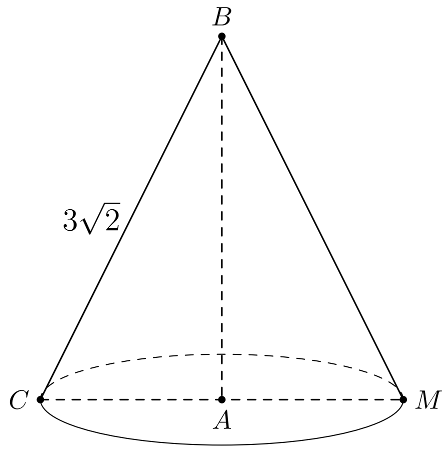


□

VÍ DỤ 6. Cho tam giác ABC vuông cân, $\widehat{A}=90^\circ$, $BC=3\sqrt{2}$ cm. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh góc vuông AB cố định. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành.

✍ **LỜI GIẢI.**

Quay tam giác vuông cân ABC một vòng quanh cạnh góc vuông AB cố định, ta được hình nón đỉnh B, đường sinh BC, bán kính đường tròn đáy là AC.
Tam giác ABC vuông cân tại A, theo định lý Pitago ta có $AB^2+AC^2=BC^2$ hay $2AC^2=(3\sqrt{2})^2=18$, suy ra $AC^2=9$, do đó $AC=3$ (cm).
Diện tích xung quanh của nón là $S_{\text{xq}}=\pi\cdot AC\cdot BC=\pi\cdot 3\cdot 3\sqrt{2}=9\sqrt{2}\pi\approx 39,85$ (cm^2).
Thể tích hình nón là $V=\dfrac{1}{3}AC^2\cdot AB=\dfrac{1}{3}\cdot AC^3=\dfrac{1}{3}\cdot 3^3=9$ (cm^3).



□

C LUYỆN TẬP

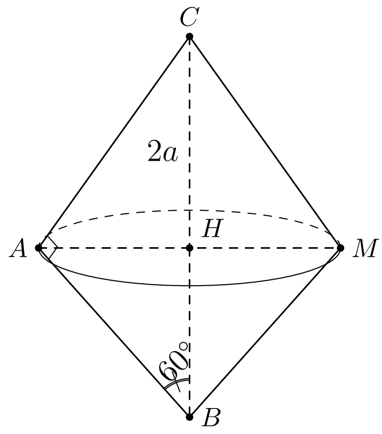
BÀI 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B}=60^\circ$ và $BC=2a$ (đơn vị độ dài). Quay xung quanh tam giác một vòng quanh cạnh huyền BC. Tìm diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành.

✍ **LỜI GIẢI.**

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng xung quanh cạnh huyền BC, ta được hai hình nón có các đáy úp vào nhau, bán kính đường tròn đáy bằng đường cao AH kẻ từ A đến cạnh huyền BC. Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đơn vị độ dài).

Diện tích xung quanh hình tạo thành là $S = \pi \cdot AH(AB + AC) = \dfrac{\pi a^2(3+\sqrt{3})}{2}$ (đơn vị diện tích).

Thể tích hình tạo thành là $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BC = \dfrac{\pi a^3}{2}$ (đơn vị thể tích).



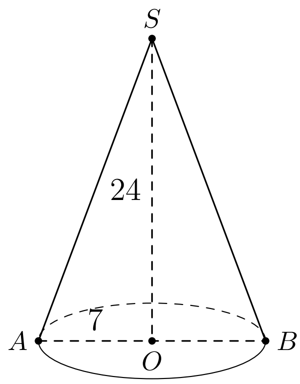
□

BÀI 2. Một hình nón có bán kính đáy bằng 7 cm, chiều cao bằng 24 cm.

❶ Tính số đo cung hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón;
❷ Tính diện tích toàn phần của hình nón;
❸ Tính thể tích của hình nón.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Đường sinh bằng $l = 25$ cm. Số đo cung của hình quạt là $n^\circ = 360^\circ \cdot \dfrac{r}{l} = 360^\circ \cdot \dfrac{7}{25} = 100,8^\circ$.
❷ Diện tích toàn phần của hình nón $S_{\text{tp}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r) = 224\pi$.
❸ Tính thể tích của hình nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot 27 = 392\pi$.

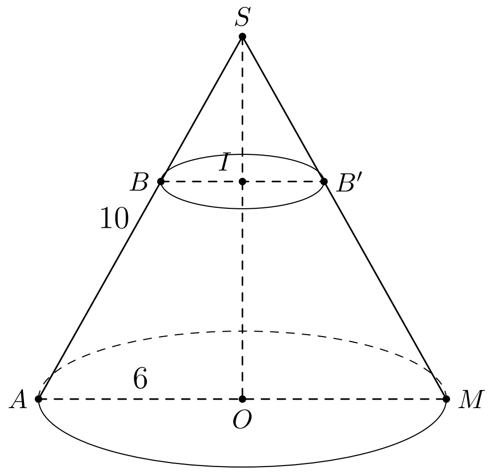


□

BÀI 3. Một hình nón có bán kính đáy bằng 6 cm, đường sinh bằng 10 cm.

❶ Tính diện tích xung quanh của hình nón;
❷ Tính thể tích của hình nón;
❸ Một mặt phẳng đi qua trung điểm của đường cao và song song với đáy hình nón chia hình nón thành một hình nón nhỏ và một hình nón cụt. Tính thể tích hình nón cụt.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Diện tích xung quanh của hình nón
$S_{\text{xq}} = \pi r l = 60\pi$ (cm^2).

❷ Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông SAO, ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 8$. Thể tích của hình nón
$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$ (cm^3).

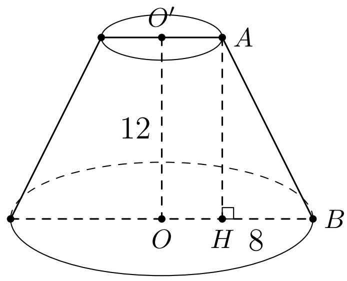
❸ Trong $\triangle SOA$, ta có $SI = IO$, $IB \parallel OA$ nên $IB = \dfrac{1}{2}OA = 3$ cm. Thể tích hình nón nhỏ bằng
$\dfrac{1}{3}\pi \cdot r'^2 \cdot h' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ (cm^3).

□

BÀI 4. Một hình nón cụt có bán kính đáy lớn bằng 8 cm, chiều cao bằng 12 cm và đường sinh bằng 13 cm.

❶ Tính bán kính đáy nhỏ của hình nón cụt;
❷ Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt;
❸ Tính thể tích của hình nón cụt.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Vẽ $AH \perp OB$ ta được $OH = O'A = r$,
$HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (cm),
suy ra $r = 8 - 5 = 3$ (cm).

❷ Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt
$S_{\text{xq}} = \pi r l = 143\pi$ (cm^2).

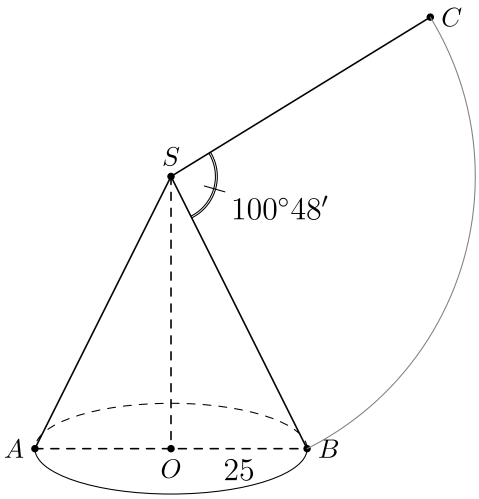
❸ Tính thể tích của hình nón cụt $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 388\pi$ (cm^3).

□

BÀI 5. Mặt xung quanh của một hình nón khai triển thành một hình quạt $100°48'$, bán kính 25 cm.

❶ Tính diện tích toàn phần của hình nón;
❷ Tính thể tích của hình nón.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Độ dài cung AB của hình quạt là

$$l = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 100,8}{180} = 14\pi \text{ (cm)}.$$

Chu vi của hình tròn đáy là 14π (cm).
Bán kính của hình tròn đáy là $R = \dfrac{14\pi}{2\pi} = 7$ (cm).
Chiều cao của hình nón là
$h = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (cm).
Diện tích toàn phần của hình nón là
$S_{\text{tp}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi \cdot 7 \cdot 25 + \pi \cdot 7^2 = 224\pi$ (cm^2).

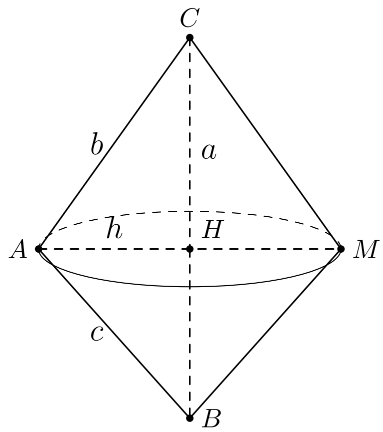
❷ Tính thể tích của hình nón là
$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 7^2 \cdot 27 = 392\pi$ (cm^3).

□

BÀI 6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi $V_1,\ V_2,\ V_3$ theo thứ tự là thể tích của các hình sinh ra khi quay tam giác ABC một vòng xung quanh các cạnh $BC,\ AB,\ AC$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}.$$

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi độ dài các cạnh của tam giác là $AC = b,\ BC = a,\ AB = c$ và $AH = h$ là chiều cao dựng từ đỉnh A xuống cạnh huyền BC. Ta có $h = \dfrac{bc}{a}$. Theo giả thiết ta có:
$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot HC + \dfrac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot HB = \dfrac{1}{3}\pi AH^2 \cdot BC = \dfrac{\pi b^2c^2}{3a}$, suy ra $\dfrac{1}{V_1^2} = \dfrac{9a^2}{\pi^2 b^4c^4}$.
Tương tự ta có $\dfrac{1}{V_2^2} = \dfrac{9}{\pi^2 b^4 c^2}$ và $\dfrac{1}{V_3^2} = \dfrac{9}{\pi^2 b^2 c^4}$, do đó $\dfrac{1}{V_2^2} + \dfrac{1}{V_3^2} = \dfrac{9}{\pi^2 b^4 c^2} + \dfrac{9}{\pi^2 b^2 c^4} = \dfrac{9(b^2+c^2)}{\pi^2 b^4 c^4} = \dfrac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4}$.
Vậy $\dfrac{1}{V_1^2} = \dfrac{1}{V_2^2} + \dfrac{1}{V_3^2}$.

□

BÀI 3 HÌNH CẦU - DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

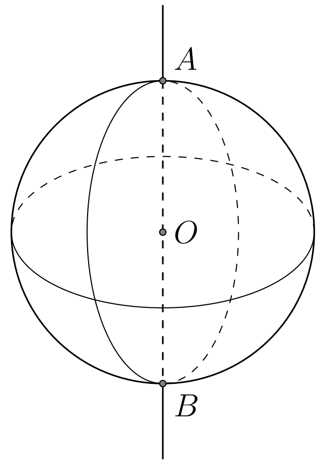
1. Hình cầu

Định nghĩa 1. Khi quay nửa hình tròn $(0; R)$ một vòng quanh đường kính AB cố định, ta được một hình cầu.

— Nửa hình tròn khi quay quét nên mặt cầu.

— Điểm O gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu.

Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì mặt cắt là một hình tròn.



2. Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$, với R là bán kính; d là đường kính.

- Thể tích hình cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

B CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Một phao cơ hình cầu tự động đóng nước chảy vào bể khi bể đầy. Biết diện tích bề mặt của phao là 804 cm^2, tính bán kính của phao.

LỜI GIẢI.

Từ công thức $S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$.

Bán kính của phao là $R = \sqrt{\dfrac{804}{4\pi}} \approx 8$ cm. □

VÍ DỤ 2. Phần trên của một chiếc cốc chân cao có dạng nửa hình cầu. Biết cốc này có thể chứa được $56,5$ ml nước. Tính đường kính của miệng cốc.

LỜI GIẢI.

Vì dung dích của cốc là 56,5 ml nên thể tích của cốc là 56,5 cm^3.

Ta có $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ do đó có thể tích của nửa hình cầu là $\dfrac{2}{3}\pi R^3$.

Theo đề bài, ta có $\dfrac{2}{3}\pi R^3 = 56{,}5 \Rightarrow R^3 = \dfrac{3 \cdot 56 \cdot 5}{2\pi} \approx 27$ cm^3, suy ra $R = 3$ cm.

Vậy đường kính của miệng cốc là $3 \cdot 2 = 6$ cm. □

VÍ DỤ 3. Một trái dưa có dạng hình cầu. Bổ đôi trái dưa này ra thì mặt cắt có diện tích là 314 cm^2. Tính thể tích của trái dưa đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

Khi bổ đôi trái dưa thì mặt cắt là một hình tròn.

Ta có: $S = \pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}} \approx \sqrt{\dfrac{314}{3{,}14}} = 10$ cm.

Vậy bán kính của trái dưa là 10 cm.

Thể tích của trái dưa là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 \approx 4187 \text{ cm}^3.$$

□

VÍ DỤ 4. Trái đất có bán kính 6400 km. Diện tích biển và đại dương chiếm $\dfrac{3}{4}$ bề mặt trái đất. Hãy tính diện tích biển và đại dương của trái đất (làm tròn đến triệu km^2).

✍ **LỜI GIẢI.**

Diện tích bề mặt trái đất là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6400^2 \approx 514457600$ km^2.

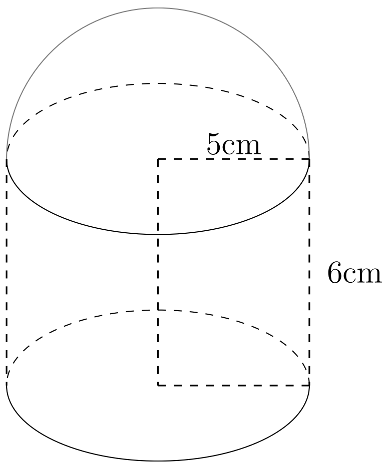
Diện tích các biển và đại dương là $514457600 \cdot \dfrac{3}{4} \approx 386000000$ km^2. □

VÍ DỤ 5.

Hình bên minh họa bộ phận lọc của một bình nước. Bộ phận này gồm một hình trụ và một nửa hình cầu với kích thước ghi trên hình. Hãy tính

❶ Thể tích của bộ phận đó;

❷ Diện tích mặt ngoài của bộ phận này.



✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Thể tích phần hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 150\pi$ cm^3.

Thể tích nửa hình cầu:

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{250}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

Thể tích bộ phận lọc là:

$$V = V_1 + V_2 = 150\pi + \frac{250}{3}\pi = \frac{700}{3}\pi \text{ cm}^3 \approx 733 \text{ cm}^3.$$

❷ Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_1 = 2\pi R h = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 = 60\pi \text{ cm}^2.$$

Diện tích đáy hình trụ là:

$$S_2 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ cm}^3.$$

Diện tích nửa mặt cầu là:

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 2\pi \cdot 5^2 = 50\pi \text{ cm}^3.$$

Diện tích mặt ngoài của bộ phận lọc:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 60\pi + 25\pi + 50\pi = 135\pi \text{ cm}^2 \approx 424 \text{ cm}^2.$$

□

C LUYỆN TẬP

BÀI 1. Cho hình cầu có bán kính $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

❶ Tính diện tích mặt cầu.

❷ Tính thể tích của khối cầu tương ứng.

✍ **LỜI GIẢI.**

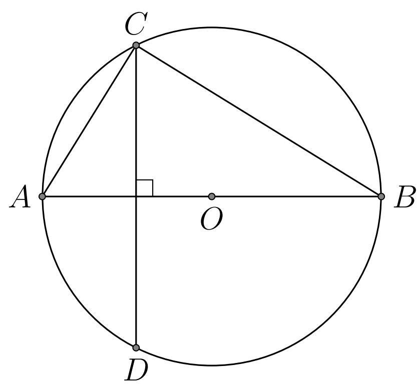
❶ Ta có $S = 4\pi \left(\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\pi a^2$ đvdt.

❷ $V = \dfrac{4}{3}\pi \left(\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{125a^3\sqrt{2}}{3}$đvtt.

□

BÀI 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây $CD \perp AB$ tại H. Cho biết $CD = 12$ cm và $AH = 4$ cm. Quay đường tròn này một vòng quanh AB. Tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu được tạo thành.

✍ **LỜI GIẢI.**



Vẽ các đoạn thẳng CA, CB ta được: $\widehat{ACB} = 90°$.

Vì $AB \perp CD$ nên $HD = HC = 6$ cm.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có

$$CH^2 = HA \cdot HB.$$

Suy ra: $HB = \dfrac{CH^2}{HA} = \dfrac{6^2}{4} = 9$ cm.

Do đó, bán kính của đường tròn là $(4 + 9) : 2 = 6{,}5$ cm, bán kính hình cầu là $6{,}5$ cm.

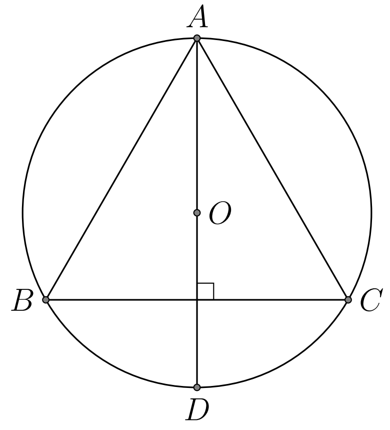
Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot (6{,}5)^2 \approx 531 \text{ cm}^2$.

Diện tích hình cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (6{,}5)^3 \approx 1150 \text{ cm}^3$.

□

BÀI 3. Cho đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác đều ABC. Quay đường tròn này một vòng quanh đường kính AOD ta được một hình cầu ngoại tiếp một hình nón. Tính thể tích phần bên trong hình cầu và bên ngoài hình nón.

✍ **LỜI GIẢI.**



Độ dài cạnh của tam giác đều là $AB = R\sqrt{3}$.
Bán kính đáy hình tròn là $r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.
Chiều cao của hình nón là $h = \dfrac{R\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R}{2}$.
Thể tích hình cầu là $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.
Thể tích hình nón là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{2}R = \frac{3}{8}\pi R^3.$$

Thể tích phần cần tìm là

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{3}{8}\pi R^3 = \frac{23}{24}\pi R^3.$$

□

BÀI 4. Bạn An lấy thước dây đo vòng theo đường xích đạo của quả địa cầu trong thư viện được độ dài 94,2 cm. Hãy tính

❶ Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu.
❷ Thể tích của quả địa cầu.

✍ **LỜI GIẢI.**

Ta có chu vi của đường tròn xích đạo là 94,2 cm nên

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{94{,}2}{2\cdot 3{,}14} = 15 \text{ cm}.$$

Do đó

❶ Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu là $S = 4\pi R^2 = 900\pi$ cm^2.
❷ Thể tích của quả địa cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4500$ cm^3.

□

BÀI 5. Quả bóng bàn có số đo diện tích bề mặt (tính bằng cm^2) gấp 1,5 lần số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính, diện tích và thể tích của quả bóng bàn.

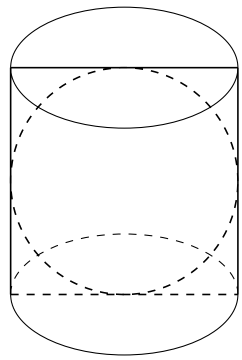
✍ **LỜI GIẢI.**

Theo đề bài, ta có $4\pi R^2 = 1{,}5\cdot\dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = 2$ cm.
Do đó, diện tích quả bóng là $S = 4\pi R^2 = 16\pi$ cm^2.
Thể tích của quả bóng là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32}{3}\pi$ cm^3. □

BÀI 6. Một hình cầu đặt vừa khít trong một hình trụ có chiều cao là 18 cm. Tính thể tích phần không gian nằm trong hình trụ nhưng nằm bên ngoài hình cầu.

✍ **LỜI GIẢI.**

Vì hình cầu đặt vừa khít trong hình trụ nên chiều cao của hình trụ bằng đường kính đáy và bằng đường kính của hình cầu.
Bán kính đáy của hình cầu là 9 cm.
Khi đó, thể tích hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 9^2 \cdot 18 = 1458$ cm^3.
Thể tích hình cầu là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 972\pi$ cm^3.
Vậy thể tích cần tính là $V = V_1 - V_2 = 486\pi \approx 1526$ cm^3.



□

BÀI 7. Một trái bưởi hình cầu có đường kính 18 cm. Lớp vỏ dày 1 cm. Tính thể tích của lớp vỏ bưởi.

✍ **LỜI GIẢI.**

Bán kính trái bưởi là $R = 9$ cm. Bán kính trái bưởi sau khi gọt hết vỏ là $r = 9 - 1 = 8$ cm. Khi đó, thể tích lớp vỏ bưởi là

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(9^3 - 8^3\right) \approx 909 \text{ cm}^3.$$

□

BÀI 8. Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo đề bài, ta có $4\pi R^2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = 3$ cm. □

BÀI 9. Một hình cầu có diện tích bề mặt là 100π m^2. Tính thể tích của hình cầu đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

Theo đề bài, ta có $4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R = 5$ m. Vậy thể tích hình cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \dfrac{500\pi}{3}$ m^3. □

BÀI 10. Cho tam giác đều ABC cạnh a, đường cao AH. Ta quay nửa đường tròn nội tiếp và nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác đều này một vòng quanh AH. Tính

❶ Tỉ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình nón.

❷ Tỉ số thể tích của hai hình cầu nói trên.

❸ Tính thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp hình nón.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi R và r lần lượt là các bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác đều. Ta có $R = 2r$.
Vì $BC = a$ nên $HC = \dfrac{a}{2}$. Và $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

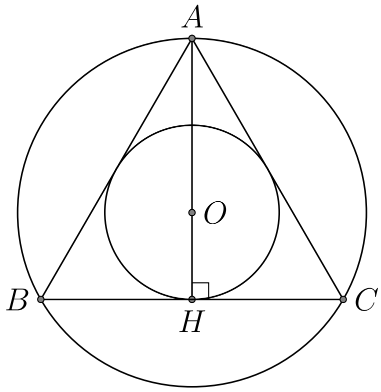
❶ Tỉ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón là

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{r^2}{(2r)^2} = \frac{1}{4}.$$

❷ Tỉ số thể tích hai hình cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón là

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{(2r)^3} = \frac{1}{8}.$$

❸ Thể tích hình cầu ngoại tiếp là



$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27} \text{ đvdt.}$$

Thể tích hình nón là

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{q\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24} \text{ đvdt.}$$

Thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp là

$$V = V_2 - V_3 = \frac{23\sqrt{3}\pi a^3}{216} \approx 0{,}58a^3 \text{ đvdt.}$$

□

BÀI 4 ÔN TẬP CHƯƠNG IV

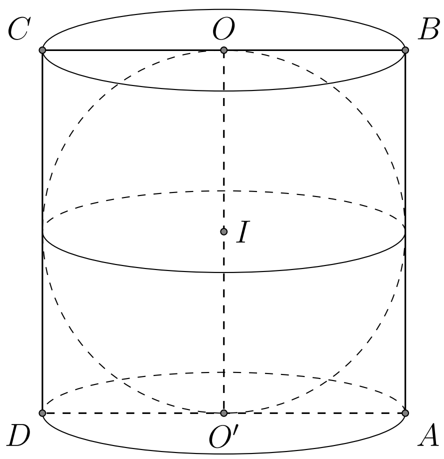
A CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho hình tròn $(I, 1\,\text{cm})$ nội tiếp hình vuông $ABCD$.

❶ Tính thể tích và diện tích của hình cầu tạo thành khi quay hình tròn $(I, 1\,\text{cm})$ quanh một đường kính của nó.

❷ Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình trụ tạo thành khi quay hình vuông $ABCD$ quanh OO', với O, O' lần lượt là trung điểm BC và AD.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Hình cầu tạo thành khi quay hình tròn $(I, 1\,\text{cm})$ quanh một đường kính của nó cũng có tâm là I và bán kính $R = 1$ cm. Do đó, thể tích của khối cần là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi}{3}$ cm^3 và diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi$ cm^2.

❷ Hình trụ tạo thành khi quay hình vuông $ABCD$ quanh OO' có hai đáy là hai hình tròn (O, OB) và $(O', O'A)$.
Vì hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(I, 1$ cm$)$ nên $AB = BC = 2$ cm.
Do đó $OB = 1$ cm.
Suy ra, thể tích hình trụ là $V = \pi \cdot OB^2 \cdot AB = 2\pi$ cm^3. Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{\text{tp}} = 2\pi \cdot OB \cdot AB + 2\pi \cdot OB^2 = 6\pi$ cm^2.

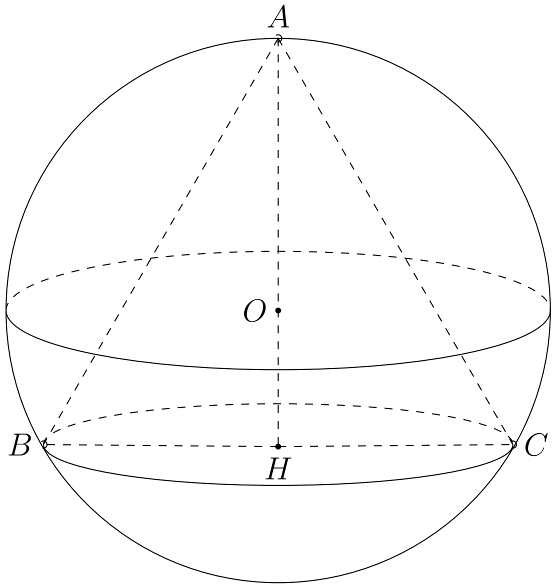
□

VÍ DỤ 2. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a, đường cao AH, nội tiếp đường tròn tâm O.

❶ Tính thể tích hình nón và hình cầu tạo thành khi quay $\triangle ABC$ và đường tròn (O) quanh trục AH, biết $a = 2$ cm.

❷ Tính tỉ số diện tích xung quanh hình nón và diện tích mặt cầu tạo thành khi quay $\triangle ABC$ và đường tròn (O) quanh trục AH.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Hình nón tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AH tạo thành hình nón có đáy là hình tròn tâm O bán kính HB, chiều cao AH.

Hình cầu tạo thành khi quay hình tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle ABC$ quanh trục AH là hình cầu tâm O bán kính OA.

Lại có $a = 2$ cm, $AH = AB\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm, $HB = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} = 1$ cm. Do $\triangle ABC$ đều nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp đồng thời là trọng tâm $\triangle ABC$, suy ra $OA = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.

Khi đó thể tích hình nón là

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}\cdot AH\cdot\pi\cdot HB^2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\text{ cm}^3.$$

Thể tích hình cầu

$$V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi\cdot OA^3 = \frac{32\pi\sqrt{3}}{27}\text{ cm}^3.$$

❷ Đường sinh của hình nón là $AB = a$. Diện tích xung quanh hình nón là

$$S_1 = \pi\cdot HB\cdot AB = \frac{a^2\pi}{2}.$$

Diện tích mặt cầu là

$$S_2 = 4\pi\cdot OA^2 = \frac{4a^2\pi}{2}.$$

Do đó tỉ số diện tích xung quanh hình nón và diện tích mặt cầu là

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2\pi}{2} : \frac{4a^2\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

□

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB = \sqrt{3}$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$.

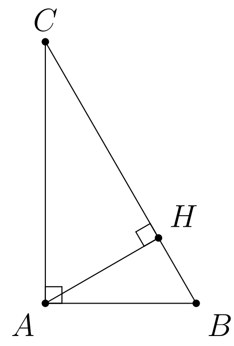
❶ Tính AC, BC và AH.

❷ Tính thể tích khối tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AC.

❸ Tính thể tích khối tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục BC.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶



Ta có $\triangle ABC$ vuông nên

$$AC = AB \cdot \tan B = \sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3 \text{ cm}.$$

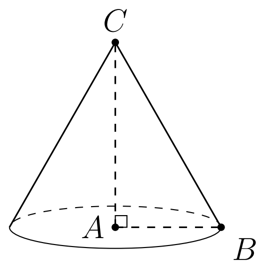
Theo định lí Pi-ta-go lại có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Mặt khác $\triangle AHB$ vuông tại H nên

$$AH = AB \cdot \sin B = \frac{3}{2} \text{ cm}.$$

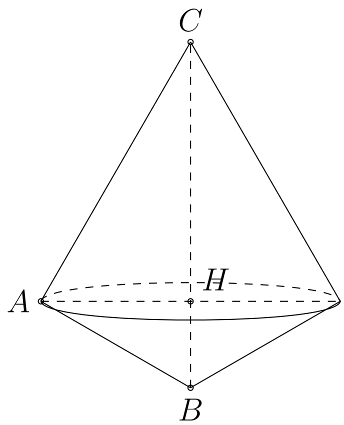
❷



Khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AC tạo thành khối nón đỉnh C đáy là hình tròn tâm A bán kính AB. Thể tích khối nón là

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} \cdot AC \cdot \pi \cdot AB^2 = 3\pi \text{ cm}^3.$$

❸



Khi quay $\triangle ABC$ quanh trục BC tạo thành hai khối nón đỉnh B và đỉnh C chung đáy là hình tròn tâm H, bán kính HA (hình vẽ).
Lại có $AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow CH = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm $\Rightarrow BH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm.
Khi đó thể tích khối nón đỉnh C, đáy hình tròn (H, HA) là

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot CH \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{9\pi\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^3.$$

Thể tích khối nón đỉnh B, đáy hình tròn (H, HA) là

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot BH \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{3\pi\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^3.$$

Vậy thể tích khối cần tính là $V = V_1 + V_2 = \dfrac{3\pi\sqrt{3}}{2}$ cm^3.

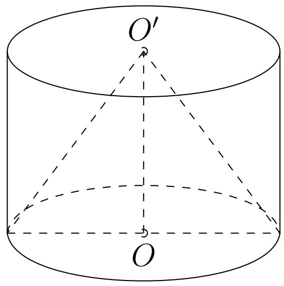
□

VÍ DỤ 4. Cho hình trụ (T) có hai đáy là hình tròn $(O; R)$ và (O', R) và hình nón (N) có đỉnh là O', đáy là hình tròn (O, R).

❶ Từ miếng xốp hình trụ (T), người ta gọt bỏ để tạo thành khối xốp hình nón (N). Tính thể tích phần bị gọt bỏ đi. Biết $R = 3$ cm và $OO' = 4$ cm.

❷ Nếu tăng gấp đôi bán kính R thì thể tích hình trụ (T) và hình nón (N) thay đổi như nào?

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Thể tích khối xốp hình trụ là $V_{\text{trụ}} = OO' \cdot \pi \cdot R^2 = 36\pi$ cm^3.
Thể tích khối xốp hình nón là $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2 = 12\pi$ cm^3.
Vậy thể tích phần xốp bị gọt bỏ là $V = V_{\text{trụ}} - V_{\text{nón}} = 24\pi$ cm^3.

❷ Thể tích hình trụ với bán kính R là $V_1 = OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
Thể tích hình trụ với bán kính $R' = 2R$ là $V_1 = OO' \cdot \pi \cdot (2R)^2 = 4 \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
Khi đó ta có $\dfrac{V_1}{V_1'} = \dfrac{1}{4}$.
Vậy khi tăng gấp đôi bán kính R thì thể tích hình trụ tăng lên 4 lần.
Thể tích hình nón với bán kính R là $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
Thể tích ình nón với bán kính $R' = 2R$ là $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot (2R)^2 = \dfrac{4}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
Khi đó ta có $\dfrac{V_2}{V_2'} = \dfrac{1}{4}$.
Vậy khi tăng gấp đôi bán kính R thì thể tích hình nón tăng lên 4 lần.

□

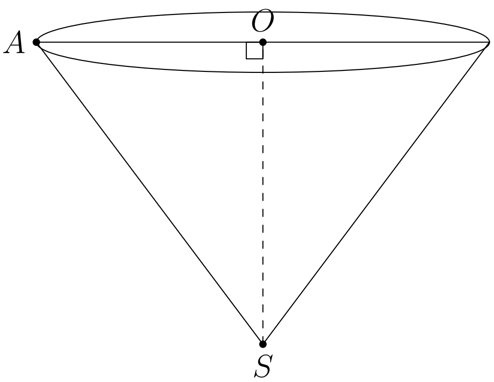
VÍ DỤ 5. Cho một cái phễu chứa nước hình nón ngược. Miệng phễu là đường tròn đường kính 6 dm. Khoảng cách từ đáy phễu đến một điểm bất kì trên miệng phễu bằng 5 dm.

❶ Tính lượng nước để đổ đầy phễu (giả thiết rằng thành phễu có độ dày không đáng kể).

❷ Người ta đổ đầy nước vào phễu rồi rút ra sao cho chiều cao của lượng nước còn lại chỉ bằng một nửa lượng nước ban đầu. Tính thể tích lượng nước còn lại trong phễu.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶



Gọi O là tâm đường tròn đáy của cái phễu và A là một điểm trên đường tròn ấy, khi đó $SA = 5$ dm, $OA = 3$ dm và $SO \perp OA$.
Suy ra, chiều cao của cái phễu là

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 4 \text{ dm}.$$

Thể tích của cái phễu là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \pi \cdot OA^2 = 12\pi \text{ dm}^3.$$

Lượng nước đổ đầy phễu cũng chính là thể tích của cái phễu, tức là 12π dm^3.

❷

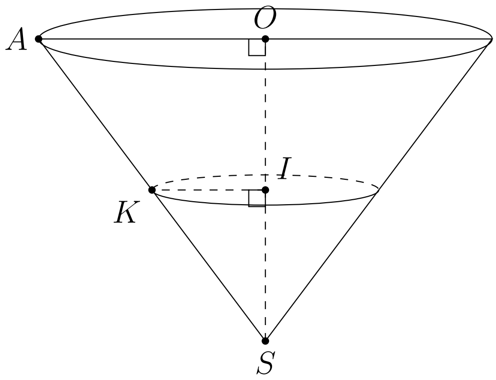
Gọi I là trung điểm SO, K là trung điểm SA thì phần nước còn lại trong phễu cũng là một khối nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm I bán kính IK.

Ta có IK là đường trung bình $\triangle SOA$ nên

$$IK = \frac{OA}{2} = \frac{3}{2} \text{ dm}.$$

Do đó thể tích phần nước còn lại trong phễu là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot \pi \cdot IK^2 = \frac{3\pi}{2} \text{ dm}.$$



□

B LUYỆN TẬP

BÀI 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ cm và $AD = 2$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

❶ Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN thì được khối gì? Tính thể tích của khối đó.

❷ Khi quay $\triangle NAB$ quanh trục MN thì được khối gì? Tính diện tích xung quanh của khối đó.

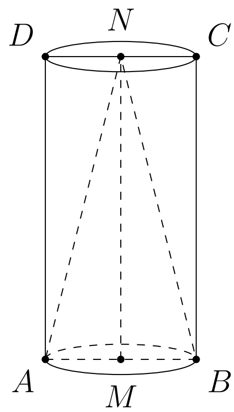
✍ **LỜI GIẢI.**

❶ Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN thì được khối trụ có đáy là hình tròn tâm M bán kính $MA = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2}$ và hình tròn tâm N bán kính ND có thể tích là

$$V = AD \cdot \pi \cdot MA^2 = \frac{\pi}{2} \text{ cm}^3.$$

❷ Khi quay $\triangle NAB$ quanh trục MN thì được khối nón đỉnh N đáy là hình tròn (M, AM), độ dài đường sinh là $AN = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ và có diện tích xung quanh là

$$S = \pi \cdot AM \cdot AN = \frac{\pi\sqrt{17}}{4} \text{ cm}^2.$$



□

BÀI 2. Cho hình tròn (O, R) có diện tích bằng 4π. Quay hình tròn quanh một đường kính ta được hình cầu tâm O bán kính R.

❶ Tính thể tích hình cầu.

❷ Nếu diện tích hình tròn giảm một nửa thì diện tích của mặt cầu sẽ thay đổi như nào?

✍ **LỜI GIẢI.**

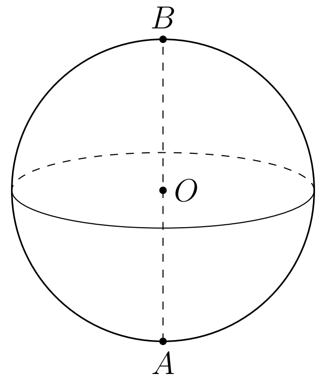
❶

Diện tích hình tròn là

$$\pi \cdot R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 2.$$

Do đó thể tích hình cầu là

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{32\pi}{3}.$$



❷ Diện tích mặt cầu là

$$S = 4\pi \cdot R^2 = 16\pi.$$

Nếu diện tích hình tròn giảm một nửa thì được tròn bán kính R' và

$$\pi \cdot R'^2 = 2\pi \Leftrightarrow R' = \sqrt{2}.$$

Khi đó diện tích của mặt cầu mới là

$$S' = 4\pi \cdot R'^2 = 8\pi.$$

Suy ra $\dfrac{S}{S'} = 2$. Vậy diện tích mặt cầu cũng giảm đi một nửa.

□

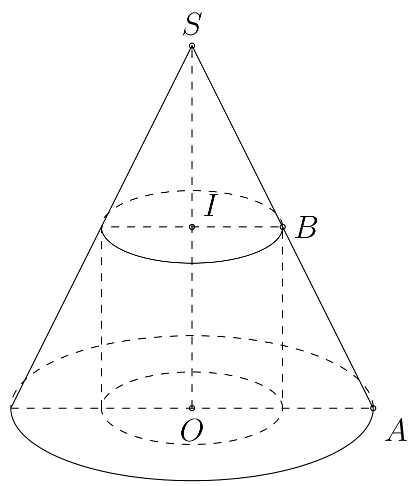
BÀI 3. Cho một khối xốp hình nón có đường kính đáy bằng 18 cm và độ dài từ đỉnh đến một điểm trên đường tròn đáy bằng 15 cm.

❶ Tính chiều cao và thể tích của hình nón đó.

❷ Cắt chỏm của khối xốp sao cho phần còn lại là hình nón cụt có chiều cao bằng một nửa chiều cao của hình nón ban đầu. Tính thể tích của phần bị cắt bỏ đi.

❸ Tiếp tục cắt khối nón cụt trên để tạo thành hình trụ có đáy là đáy nhỏ của hình nón cụt. Tính thể tích của hình trụ mới tạo thành.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Giả sử hình nón có đỉnh là điểm S đáy là đường tròn tâm O, A là một điểm trên đường tròn đáy. Khi đó bán kính đáy hình nón là $OA = \dfrac{18}{2} = 9$ cm và chiều cao của hình nón là

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ cm}.$$

Thể tích của hình nón là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \pi \cdot OA^2 = 324 \text{ cm}^3.$$

❷ Gọi I là trung điểm SO, B là trung điểm SA. Phần bị cắt bỏ đi cũng là khối nón có đỉnh S đáy là hình tròn (I, IB).

IB là đường trung bình của $\triangle SOA$ nên $IB = \frac{OA}{2} = \frac{9}{2}$. Thể tích khối nón bị cắt là

$$\frac{1}{3} \cdot SI \cdot \pi \cdot IB^2 = \frac{81\pi}{2} \text{ cm}^3.$$

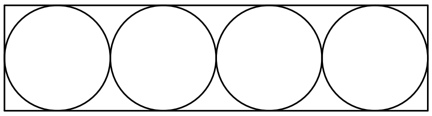
❸ Khối trụ có đáy là hình tròn (I, IB) chiều cao IO nên có thể tích là

$$V' = IO \cdot \pi \cdot IB^2 = \frac{243\pi}{2} \text{ cm}^3.$$

□

BÀI 4. Một cái hộp hình trụ chứa vừa khít 4 quả ten-nít. Biết diện tích toàn phần của hộp là 597cm^2. Tính đường kính và thể tích của mỗi quả ten-nít.

✍ **LỜI GIẢI.**



Gọi R là bán kính của mỗi quả ten-nít thì bán kính đáy hộp là R, chiều cao của trụ là $8R$.

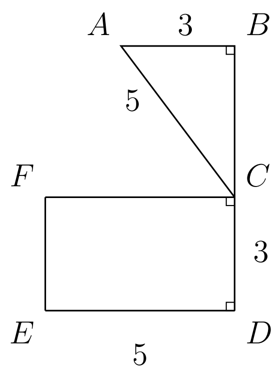
Ta có $S_{\text{dttp}} = 2 \cdot S_{\text{đáy}} + S_{\text{xq}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 8R = 18\pi R^2$.

Ta lại có diện tích xung quanh đề bài cho là $597\text{cm}^2 \Rightarrow R \approx 3,25\text{cm}$.

Vậy $V = \frac{4}{3}\pi R \approx \frac{4}{3}\pi \cdot (3,25)^3 \approx 144\text{cm}^3$. □

BÀI 5.

Cho hình vẽ bên. Tính tổng thể tích của các khối tạo thành khi quay hình bên quanh trục BD.



✍ **LỜI GIẢI.**

Tam giác ABC quay quanh trục BD sẽ tạo thành hình nón với bán kính đáy bằng cạnh AB và đường cao là BC.

Thể tích hình nón này là

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot BC \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot \sqrt{AC^2 - BC^2} \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2} \end{aligned}$$

$$= \quad 12\pi \text{ (đvtt).}$$

Hình chữ nhật $CDEF$ quay quanh trục BD sẽ tạo thành hình trụ với bán kính đáy bằng cạnh DE và đường cao là CD.
Thể tích hình trụ này là

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \cdot DE^2 \cdot CD \\ &= \pi \cdot 5^2 \cdot 3 \\ &= 75\pi \text{ (đvtt).} \end{aligned}$$

Thể tính khối tạo thành khi quay hình trên quanh trục BD là

$$V = V_1 + V_2 = 87\pi \text{ (đvtt).}$$

□

BÀI 6. Một hình nón có đỉnh là tâm một hình cầu và có đáy là hình tròn tạo bởi một mặt phẳng cắt hình cầu. Biết diện tích đáy hình nón là $144\pi\text{cm}^2$ và diện tích xung quanh của nó là $180\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích phần không gian bên trong hình cầu và bên ngoài hình nón.

✍ **LỜI GIẢI.**

Tính bán kính đáy hình nón là

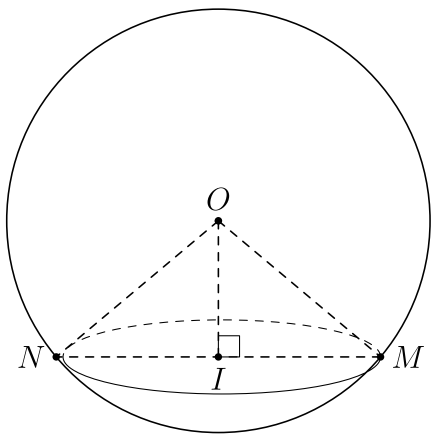
$$\pi \cdot IM^2 \cdot 144\pi \Leftrightarrow r = IM = 12\text{cm}.$$

Tính đường sinh hình nón là

$$S_{\text{xq}} = 180\pi \Leftrightarrow \pi \cdot r \cdot l = 180\pi \Leftrightarrow l = OM = 15\text{cm}.$$

Chiều cao hình nón là

$$h = OI = \sqrt{OM^2 - IM^2} = \sqrt{l^2 - r^2} = 9\text{cm}.$$



Tính hiệu thể tích giữa hình cầu và hình nón được

$$V = V_{\text{cầu}} - V_{\text{nón}} = \frac{4}{3}\pi \cdot OM^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot IM^2 \cdot h = 4068\pi\text{cm}^3.$$

□

BÀI 7. Tam giác đều ABC có độ dài cạnh là a, ngoại tiếp một đường tròn. Cho hình quay một vòng xung quanh đường cao AH của tam giác đó, ta được một hình nón ngoại tiếp hình cầu. Tính thể tích phần hình nón nằm ngoài hình cầu.

✍ **LỜI GIẢI.**

Gọi I là tâm của tam giác ABC. Bán kính hình cầu là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC, nghĩa là IH.

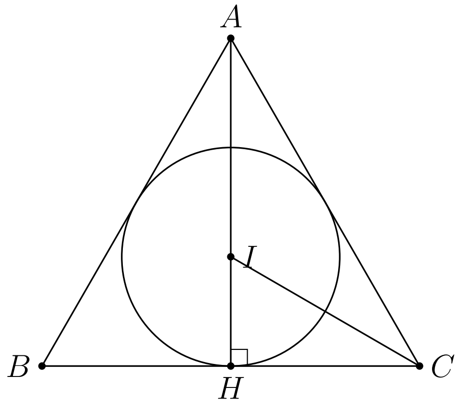
Ta có $AH^2 = CA^2 - CH^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $R = IH = \dfrac{1}{3} \cdot AH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Do đó thể tích hình cầu là $V_c = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{54}$ (đvtt).

Thể tích hình nón là

$$V_n = \frac{1}{3}\pi \cdot AH \cdot HB^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{8} \text{ (đvtt)}.$$



Vậy phần thể tích hình nón nằm ngoài hình cầu là $V' = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8} - \dfrac{a^3\sqrt{3}}{54} = \dfrac{23a^3\sqrt{3}}{216}$ (đvtt). □

BÀI 8. Một hình nón cụt có bán kính đáy lớn là 9 cm và bán kính đáy bé là 6 cm, chiều cao bằng 4 cm.

❶ Tính diện tích xung quanh hình nón cụt.

❷ Tính thể tích của hình nón sinh ra hình nón cụt đó.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

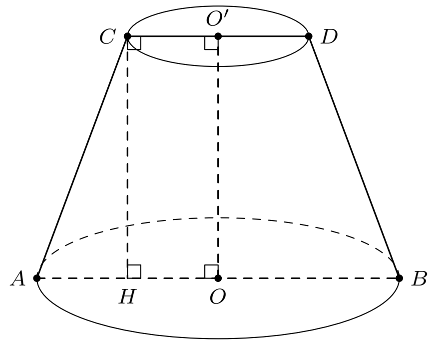
Kẻ $CH \perp AB$ (tại H). Khi đó $CH = OO' = 4$ (cm).

Mặt khác, $HA = OA - OH = OA - O'C = 3$ (cm).

Vậy $l = CA = \sqrt{CH^2 + HA^2} = 5$ (cm).

Diện tích xung quanh hình nón cụt là

$$S_{\text{xq}} = \pi(r_1 + r_2)l = 75\pi.$$



❷ Gọi giao điểm của OO' và CA là S.

Theo hệ quả của định lý Ta-lét, ta có $\dfrac{SO'}{CO'} = \dfrac{SO}{AO}$.

Gọi $SO' = x$ (cm) $(x > 0)$ thì từ đẳng thức trên ta có

$$\frac{x}{6} = \frac{x+4}{9}.$$

Giải phương trình này ta có nghiệm $x = 8$ (nhận).

Vậy chiều cao của hình nón sinh ra hình nón cụt đó là $h = SO = SO' + OO' = 12$ (cm).

Thể tích cần tìm là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 324\pi$ (đvtt).

□

BÀI 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ $(AB > AD)$ có chu vi là diện tích lần lượt là 6 cm và 2 cm^2.

❶ Tính thể tích và diện tích hình trụ được sinh ra khi quay hình chữ nhật quanh cạnh AB.

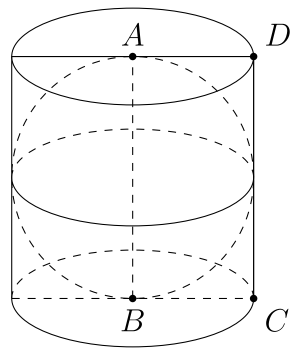
❷ Hình trụ này có thể chứa vừa khít một khối cầu bán kính R. Tính R và phần thể tích giữa hình trụ và khối cầu.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

Ta có

$$\begin{cases}2(AB+AD)=6\\AB\cdot AD=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB+AD=3\\AB\cdot AD=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB=2\,(\text{cm})\\AD=1\,(\text{cm}).\end{cases}$$



Thể tích của hình trụ

$$V=AB\cdot\pi AD^2=2\pi\,(\text{cm}^3).$$

Diện tích của hình trụ

$$S=AB\cdot 2\pi AD+2\cdot\pi AD^2=4\pi+2\pi=6\pi\,(\text{cm}^2).$$

❷ Ta có bán kính khối cầu

$$R=\frac{AB}{2}=1\,(\text{cm}).$$

Thể tích khối cầu

$$V_1=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\,(\text{cm}^3).$$

Phần thể tích giữa khối trụ và khối cầu bằng

$$V-V_1=\frac{14}{3}\pi\,(\text{cm}^3).$$

□

BÀI 10. Cho ba điểm A, O, B thẳng hàng theo thứ tự đó và $OA=a$, $OB=b$. Vẽ hai tia Ax, By vuông góc với AB. Qua O vẽ hai tia vuông góc với nhau tại O và lần lượt cắt Ax, By tại C, D. Cho $\widehat{COA}=30^\circ$.

❶ Tính tỉ số thể tích của các hình do tam giác AOC và BOD tạo thành khi quay hình này quanh trục AB.

❷ Giả sử $\widehat{BDC}=60^\circ$. Tính thể tích hình nón cụt được tạo thành khi quay hình vẽ quanh trục AB.

✍ **LỜI GIẢI.**

❶

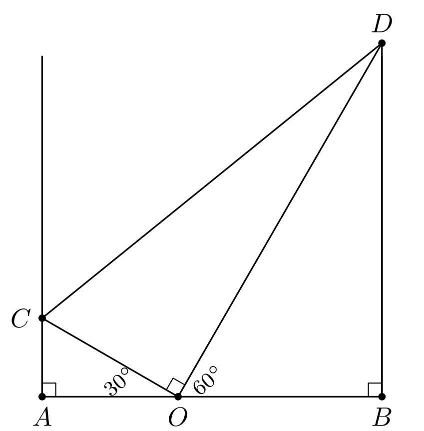
Quay $\triangle AOC$ quanh trục AB ta được hình nón có

+ Chiều cao $h=OA=a$.

+ Bán kính đáy $r=AC=OA\cdot\tan 30^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó thể tích của hình nón này là

$$V_1=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi a^3}{9}.$$



Quay $\triangle BOD$ quanh trục AB ta được hình nón có

+ Chiều cao $h=OB=b$.

+ Bán kính đáy $r=BD=OB\cdot\tan 60^\circ=b\sqrt{3}$.

Khi đó thể tích của hình nón này là

$$V_2=\frac{1}{3}\pi r^2h=\pi b^3.$$

Vậy thể tích cần tìm là $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{a^3}{9b^3}$.

❷ Quay hình vẽ quanh trục AB ta được hình nón cụt có

+ Bán kính đáy lớn $R = BD = b\sqrt{3}$.

+ Bán kính đáy nhỏ $r = AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

+ Chiều cao $h = AB = OA + OB = a + b$.

Suy ra thể tích của hình nón cụt cần tìm là

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + rR\right) = \frac{1}{3}\pi(a+b)\left(3b^2 + \frac{1}{3}a^2 + ab\right).$$

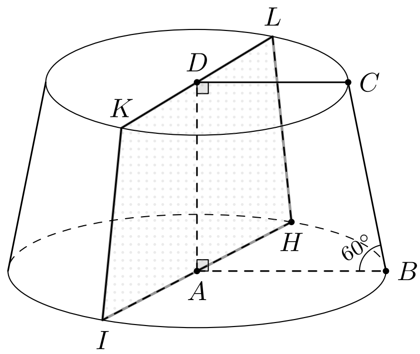
□

BÀI 11. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $BC = 4$ cm, $CD = 2$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$. Khi quay hình thang vuông $ABCD$ quanh trục AD tạo thành một hình nón cụt.

❶ Tính thể tích của hình nón cụt.

❷ Cắt hình nón cụt trên bởi một mặt phẳng qua trục AD thì mặt cắt tạo thành là hình gì? Tính diện tích của hình đó.

✍ **LỜI GIẢI.**



❶ Ta có $r = CD = 2$ (cm), $R = AB$, $h = AD$.

$h = AD = \sin 60^\circ \cdot BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$ (cm).

$R = AB = DC + \cos 60^\circ \cdot BC = 2 + \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 3$ (cm).

Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(r^2 + R^2 + rR\right) = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(2^2 + 3^2 + 2 \cdot 3\right) = \dfrac{38\pi\sqrt{3}}{3}$ $\left(\text{cm}^3\right)$.

❷ Cắt hình nón cụt trên bởi một mặt phẳng qua trục AD thì mặt cắt tạo thành là hình thang cân có độ dài 2 đáy lần lượt là $2r$ và $2R$ và chiều cao là h.

Diện tích của hình thang này là

$$S = \frac{h(2r + 2R)}{2} = h(r + R) = 2\sqrt{3} \cdot (2 + 3) = 10\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

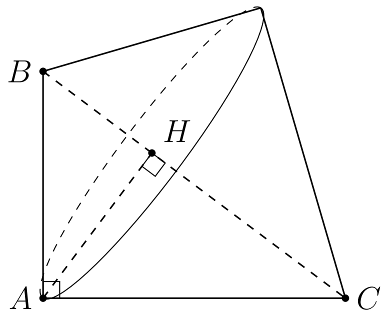
□

BÀI 12. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_1, V_2, V_3 theo thứ tự là thể tích của những hình sinh ra khi quay tam giác ABC một vòng xung quanh các cạnh BC, AB, AC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}.$$

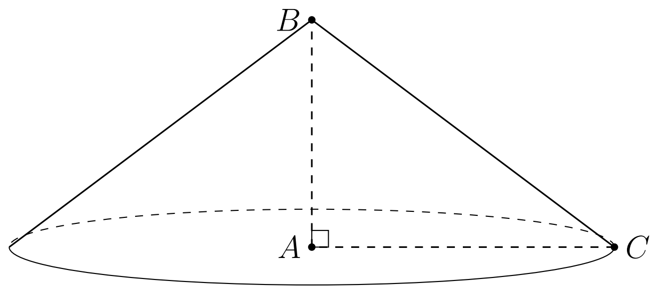
✍ LỜI GIẢI.

Gọi H là chân đường cao xuất phát từ A. Khi quay ΔABC quanh cạnh BC, ta thu được hai hình nón có bán kính đáy chung là HA, chiều cao lần lượt là HB và HC.

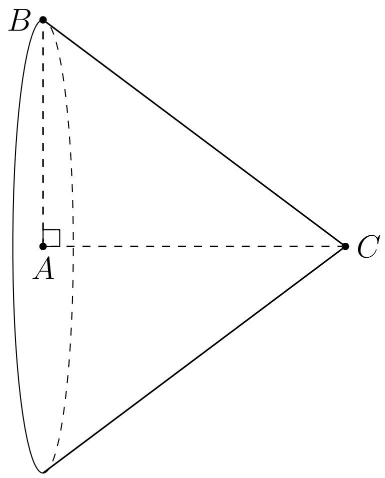


Thể tích của hình sinh ra là tổng thể tích hai hình nón này.
Vậy $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi(CH \cdot AH^2 + BH \cdot AH^2) = \dfrac{1}{3}\pi BC \cdot AH^2$.

Khi quay ΔABC quanh cạnh AB, ta thu được hình nón có bán kính đáy AC, chiều cao AB. Vậy $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi AB \cdot AC^2$.



Khi quay ΔABC quanh cạnh AC, ta thu được hình nón có bán kính đáy AB, chiều cao AC. Vậy $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi AC \cdot AB^2$.



Do đó

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2} &= \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{1}{AB^2 \cdot AC^2} \cdot \left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}\right) \\
&= \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{1}{AB^2 \cdot AC^2} \cdot \frac{1}{AH^2} \\
&= \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} \cdot \frac{1}{AH^2} \cdot \frac{1}{AB^2 + AC^2} \\
&= \frac{9}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}\right) \cdot \frac{1}{AH^2} \cdot \frac{1}{BC^2} \\
&= \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{1}{AH^2} \cdot \frac{1}{AH^2} \cdot \frac{1}{BC^2} = \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{1}{AH^4} \cdot \frac{1}{AH^2} \cdot \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{V_1^2}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 13. Cho nửa đường tròn $(O;R)$, đường kính AB.

❶ Trên AB lấy điểm H sao cho $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{2}{3}$. Tính HA, HB theo R.

❷ Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt nửa đường tròn $(O;R)$ tại M; tiếp tuyến tại M với nửa đường tròn cắt các tiếp tuyến tại A, B lần lượt tai A', B'. Chứng minh rằng tam giác $A'OB'$ vuông và $AA' \cdot BB' = R^2$.

❸ Đặt $AA' = x; BB' = y$. Tính x, y theo R.

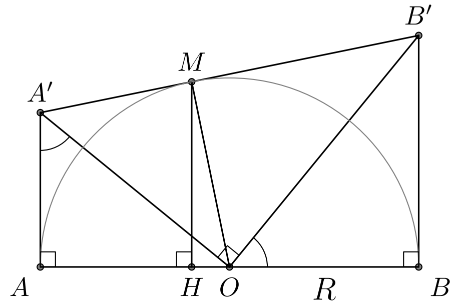
❹ Cho nửa hình tròn $(O;R)$ quay một vòng quanh cạnh AB được một hình có thể tích là V_1; cho hình thang vuông $ABB'A'$ quay quanh AB ta được một hình có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

✍ LỜI GIẢI.

❶ Ta có $\dfrac{HA}{HB}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{HA}{2}=\dfrac{HB}{3}=\dfrac{HA+HB}{5}=\dfrac{AB}{5}=\dfrac{2}{5}R$

$\Rightarrow \begin{cases} HA=\dfrac{4}{5}R \\ HB=\dfrac{6}{5}R. \end{cases}$



b) Hai tam giác OAA' và $B'BO$ có

$\begin{cases} \widehat{A}=\widehat{B}=90^\circ \\ \widehat{AOA'}=\widehat{BB'O} \quad \text{(cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc)} \end{cases}.$

Suy ra $OAA' \backsim \triangle B'BO$.

Do đó $\widehat{AA'O}=\widehat{B'OB}$.

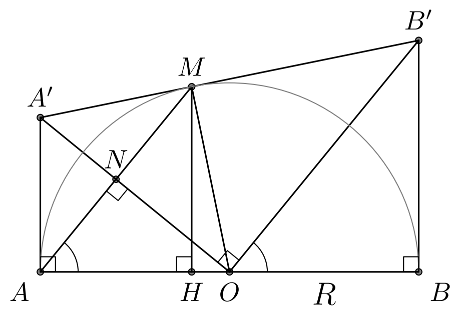
Mà $\widehat{AA'O}+\widehat{A'OA}=90^\circ$.

Suy ra $\widehat{B'OB}+\widehat{A'OA}=90^\circ$.

Vậy $\widehat{A'OB'}=90^\circ$ hay tam giác $A'OB'$ là tam giác vuông.

Mặt khác, do $\triangle OAA' \backsim \triangle B'BO$ nên $\dfrac{AA'}{BO}=\dfrac{OA}{BB'} \Leftrightarrow AA'\cdot BB'=OA\cdot OB=R^2$.

Cách khác:



Gọi N là giao điểm của AM và OA'.

Ta có $\widehat{MAB}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$.

Mà $\widehat{B'OB}=\dfrac{1}{2}\widehat{BOM}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$.

Suy ra $\widehat{MAB}=\widehat{B'OB}$.

Tam giác vuông AON có

$\widehat{NAO}+\widehat{NOA}=90^\circ$ hay $\widehat{MAB}+\widehat{A'OA}=90^\circ$.

Do đó $\widehat{B'OB}+\widehat{A'OA}=90^\circ$.

Suy ra $\widehat{A'OB'}=180^\circ-\left(\widehat{B'OB}+\widehat{A'OA}\right)=90^\circ$.

Vậy tam giác $A'OB'$ là tam giác vuông.

Mặt khác, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $OA'B'$, ta có $OM^2=A'M\cdot B'M$.

Mà theo tính chất của tiếp tuyến thì $\begin{cases} AA'=A'M \\ BB'=B'M \end{cases}$.

Suy ra $AA'\cdot BB'=OM^2=R^2$.

c) Ta có $OH=OA-AH=R-\dfrac{4}{5}R=\dfrac{R}{5}$

$\Rightarrow MH=\sqrt{OM^2-OH^2}=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{R}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}R.$

$\Rightarrow AM=\sqrt{MH^2+AH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}R\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}R\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}R.$

$\Rightarrow AN = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}R.$

$\Rightarrow ON = \sqrt{OA^2\triangle - AN^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}R.$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAA', ta có

$OA^2 = ON.OA' \Rightarrow OA' = \dfrac{OA^2}{ON} = \dfrac{R^2}{\frac{\sqrt{15}}{5}R} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}R.$

$\Rightarrow AA' = x = \sqrt{OA'^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}R\right)^2 - R^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R.$

Mặt khác, ta đã chứng minh được

$AA' \cdot BB' = R^2 \Rightarrow BB' = y = \dfrac{R^2}{AA'} = \dfrac{R^2}{\frac{\sqrt{6}}{3}R} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}R.$

Vậy $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R$ và $y = \dfrac{\sqrt{6}}{2}R.$

d) Nửa hình tròn $(O;R)$ quay một vòng quanh cạnh AB được hình cầu bán kính R có thể tích là

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Hình thang vuông $ABB'A'$ quay quanh AB được hình nón cụt với hai bán kính đáy lần lượt bằng AA', BB' và chiều cao bằng AB có thể tích là

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{3}\pi \cdot AB \cdot (AA'^2 + BB'^2 + AA' \cdot BB') \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 2R \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}R\right)^2 + R^2\right] \\ &= \frac{19}{9}\pi R^3. \end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{12}{19}.$

□